Klasszikus algebra

(Minta) 2. Zárthelyi dolgozat 2010/2011. tavaszi félév

1. Feladat. 1(a) + 1(d).
2. Feladat. 2(d).
3. Feladat. 3(c).
4. Feladat. 4(c).
5. Feladat. 5(c).

Minden feladat 10 pontot ér.

Gyakorló feladatok

1. Adja meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett.

(a) $x^4 + x^2 + 1$;
(b) $x^4 - x^2 + 1$;
(c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
(d) $x^6 + 1$;
(e) $x^{2n} - 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

2. Van-e az $f \in K[x]$ polinomnak többszörös gyöke a K testben ($K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)? Amennyiben a válasz *igen*, akkor adja meg a többszörös gyökök multiplicitását is.

(a) $x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$;
(b) $x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$;
(c) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$;
(d) $8x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1$;
(e) $x^{n+1} - (n+1)x - n$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$.

3. A paraméter(ek) mely értékeire van többszörös gyöke az $f \in K[x]$ polinomnak a K testben?

(a) $x^3 + ax + (a+1)$ $(K = \mathbb{R},\ a \in K)$;
(b) $x^3 - 3ax + b$ $(K = \mathbb{R},\ a, b \in K)$;
(c) $x^4 + 32x + \lambda$ $(K = \mathbb{C},\ \lambda \in K)$;
(d) $4x^4 + (4 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 4\lambda + 4)x^2 + (-4\lambda + \lambda^2)x + \lambda^2$ $(K = \mathbb{C},\ \lambda \in K)$;
(e) $(x^2 - 1)^n + (x^2 + 1)^n$ $(K = \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N})$.

4. Legyen $n \geqslant 3$ tetszőleges természetes szám. Írja fel az $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ szimmetrikus polinomot az elemi szimmetrikus polinomok $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ polinomjaként, azaz adjon meg olyan $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ polinomot, amelyre $f = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ teljesül.

(a) $f = \sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} x_i^2 x_j$;
(b) $f = \sum\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant n} x_i^2 x_j$;
(c) $f = \sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} x_i^2 x_j^2$;
(d) $f = \sum\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant n} x_i^2 x_j^2$;
(e) $f = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i^4$;
(f) $f = \sum\limits_{1 \leqslant i, j, k \leqslant n} x_i^2 x_j x_k$.

5. Legyen $f = x^4 + 4x^3 + 6ax^2 + 4x + 1 \in \mathbb{C}[x]$, és legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ az f polinom komplex gyökei. Megválasztható-e az a paraméter értéke úgy, hogy

(a) $\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \dfrac{1}{\alpha_3} + \dfrac{1}{\alpha_4} = 2012$;
(b) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 2012$;
(c) $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \alpha_4^3 = 2012$;
(d) $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + \alpha_4^4 = 2012$;
(d) $\sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant 4} \dfrac{1}{x_i x_j} = 2012$;
(e) $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant i, j, k \leqslant 4 \\ |\{i, j, k\}| = 3}} \dfrac{1}{x_i x_j x_k} = 2012$.