Klasszikus algebra

(Minta) | 1. Zárthelyi dolgozat | 2010/2011. tavaszi félév

1. Feladat. 1(a) + 2(b) + 3(b).
2. Feladat. 4(b).
3. Feladat. 8.
4. Feladat. 10(b).
5. Feladat. 11(d).

Minden feladat 10 pontot ér.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az alábbi komplex számok kanonikus alakját.

(a) $(2+3i)\cdot(3-4i)$; (b) $\dfrac{2+3i}{3-4i}$;

(c) $(3-i)\cdot(12+4i)$; (d) $\dfrac{3-i}{12+4i}$.

2. Határozza meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját.

(a) $(1+i)^{12}$; (b) $\left((1-i)\cdot(\sqrt{3}-i)\right)^{28}$;

(c) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{7}$; (d) $\left(\dfrac{(2-3\sqrt{3})+(3+2\sqrt{3})i}{2+3i}\right)^{28}$.

3. Határozza meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját.

(a) $\sqrt[4]{2^4}$; (b) $\sqrt[7]{1+\sqrt{3}i}$;

(c) $\sqrt[7]{\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}}$; (d) $\sqrt[7]{(1+i)\cdot(\sqrt{3}-i)}$.

4. Oldja meg az alábbi egyenleteket.

(a) $a(1+3i)+b(4-i)=-i \quad (a,b\in\mathbb{R})$; (b) $z^2=21+20i \quad (z\in\mathbb{C})$;
(c) $z^2+z=-3-15i \quad (z\in\mathbb{C})$; (d) $z^5=(1+i)z \quad (z\in\mathbb{C})$.

5. Mutassa meg, hogy ha ε és μ egységgyökök, akkor $\varepsilon\mu$ is egységgyök. Igaz-e, hogy $\varepsilon+\mu$ is egységgyök?

6. Igaz-e, hogy ha ε és μ primitív egységgyökök, akkor $\varepsilon\mu$ is primitív egységgyök?

7. Határozza meg a 18-adik primitív egységgyököket, és azok szorzatát is.

8. Legyen $G=\{(a,b): a,b\in\mathbb{Q} \text{ és } a\neq 0\}$, definiáljuk a $*$ kétváltozós műveletet a G halmazon az alábbi módon:
$$(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b) \qquad ((a,b),(c,d)\in G).$$
Mutassa meg, hogy $(G;*)$ csoport, de nem Abel-csoport.

9. Legyen $C=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{A}=(C;+,\cdot)$ kommutatív és egységelemes gyűrű, ahol $+$, illetve $\cdot$ a mátrixok szokásos összeadása, illetve szorzása. Igaz-e, hogy $\mathbb{A}$ test?

10. Határozza meg az $f,g\in K[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját:

(a) $f=x^4+x^3+x+1$, $g=x^2-3x+2$, $K=\mathbb{Q}$;

(b) $f = x^5 + x^3 + x + \overline{1}$, $g = x^3 + x + \overline{1}$, $K = \mathbb{Z}_2$;
(c) $f = x^5 + x^3 + \overline{2}x + \overline{2}$, $g = x^3 + x + \overline{2}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

11. Legyen $f \in K[x]$ és $c \in K$. Határozza meg az $a_0, a_1, \ldots, a_4 \in K$ elemeket, ha tudjuk, hogy

$$f = \sum_{k=0}^{4} a_k (x - c)^k.$$

(a) $K = \mathbb{Q}$, $f = x^4 + x^3 + x + 1$, $c = 1$;
(b) $K = \mathbb{Z}_2$, $f = x^4 + x^3 + x + \overline{1}$, $c = \overline{1}$);
(c) $K = \mathbb{Z}_5$, $f = x^4 + \overline{4}x^3 + \overline{2}x + \overline{2}$, $c = \overline{2}$;
(d) $K = \mathbb{C}$, $f = x^4 + ix^3 + 2x^2 + 1$, $c = i$.