2. Polinomfüggvény, gyök, gyöktényezős alak

2.1. Legyen $f = x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1} \in R[x]$ és $g = x^9 + x^8 + x^7 + x^2 + \overline{1} \in R[x]$. Igaz-e, hogy az f, illetve g polinomokhoz tartozó polinomfüggvények megegyeznek, ha

(a) $R = \mathbb{Z}_3$;
(b) $R = \mathbb{Z}_4$;
(c) $R = \mathbb{Z}_5$;
(d) $R = \mathbb{Z}_7$.

2.2. Mutassuk meg, hogy az alábbi leképezések nem polinomfüggvények.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$;
(b) $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$.

2.3. Az $R = \mathbb{Z}_2[x]$ halmazon definiáljuk a $\bowtie$ relációt az alábbi módon:

$$f \bowtie g \iff f(0) = g(0) \text{ és } f(1) = g(1).$$

Mutassuk meg, hogy $\bowtie$ ekvivalenciareláció és határozzuk meg az ekvivaleciaosztályokat.

2.4. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Határozzuk meg az

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}$$

egyenlet valamennyi gyökét.

2.5. Határozzuk meg az $f \in R[x]$ polinom gyöktényezős alakját:

(a) $f = x^4 + 4$, $R = \mathbb{C}$;
(b) $f = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $R = \mathbb{R}$;
(c) $f = (x + \cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n + (x + \cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n$, $R = \mathbb{C}$;
(d) $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k}\binom{2m}{2k}x^k$, $R = \mathbb{C}$ (m tetszőleges természetes szám).

2.6. Bizonyítsuk be, hogy az $f = x^{3u} + x^{3v+1} + x^{3w+2} \in \mathbb{R}[x]$ polinom osztható a $g = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinommal.

3. Irreducibilitás $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett

3.1. Bontsuk fel irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomokat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett.

(a) $f = x^4 - 1$;
(b) $f = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1$;
(c) $f = x^4 - ax^2 + 1$, ahol $-2 < a < 2$ valós szám;
(d) $f = x^{2n} - 2x^n + 2$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Melyik az a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{R}[x]$, illetve $g \in \mathbb{C}[x]$ polinom, amelynek

(a) az 1 kétszeres, a 2, 3 és $2 + i$ pedig egyszeres gyöke;
(b) az $5 + i$ kétszeres és az $1 - i$ pedig háromszoros gyöke.

4. Irreducibilis polinomok $\mathbb{Q}$ felett

4.1. Irreducibilis-e az $f = 2x^3 - 8x^2 + 6x - 20$ polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}[x]$-ben?

4.2. Határozzuk meg az $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom racionális gyökeit és irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ felett.

(a) $f = x^7 + 8x^6 + 15x^5 + 10x^3 + 35x^2 + 5x - 30$;

(b) $f = 8x^5 + 30x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 11x - 12$.

4.3. Tegyük fel, hogy az $f \neq 0$ és g racionális együtthatós polinomokra vannak olyan α és β komplex számok, amelyekre $f(\alpha) = g(\alpha) = f(\beta) = 0$, $g(\beta) = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor f nem irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

4.4. Legyen p tetszőleges prímszám. Mutassuk meg, hogy az

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

4.5. Legyen p prímszám és $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + x \pm p \in \mathbb{Z}[x]$. Mutassuk meg, hogy ha

$$1 + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| < p,$$

akkor f irreducibilis.

4.6. Legyen $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ olyan polinom, amelyre $a_0 \neq 0$ is teljesül. Mutassuk meg, hogy ha $|a_{n-1}| > 1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-2}|$, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

5. Horner-módszer

5.1. Határozzuk meg az $f \in R[x]$ polinom helyettesítési értékét az $x_0 \in R$ helyen a Horner-módszer alkalmazásával:

(a) $f = 8x^5 + 30x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 11x - 12$, $R = \mathbb{R}$ és $x_0 = 3$;

(b) $f = x^5 + 9x^3 + 5x^2 + 6$, $R = \mathbb{Q}$ és $x_0 = \frac{1}{2}$;

(c) $f = x^4 + x^3 + (2 - i)x^2 + 6ix - (1 - 2i)$, $R = \mathbb{C}$ és $x_0 = 1 + i$;

(d) $f = \overline{2}x^4 + \overline{5}x^3 + \overline{1}x^2 - \overline{2}x + \overline{6}$, $R = \mathbb{Z}_7$ és $x_0 = \overline{3}$;

(e) $f = x^{2n} - x^n + 1$, $R = \mathbb{R}$ és $x_0 \in \{1, 2\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

5.2. Írjuk fel az $f \in R[x]$ polinomot az $x - x_0$ polinom hatványai szerint rendezett alakban.

(a) $f = x^4 - 7x^2 + 5x - 17$, $R = \mathbb{Q}$ és $x_0 = 2$;

(b) $f = x^4 + 1$, $R = \mathbb{C}$ és $x_0 = i$;

(c) $f = x^4 + \overline{3}x^3 - \overline{5}x + \overline{1}$, $R = \mathbb{Z}_{11}$ és $x_0 = \overline{8}$;

(d) $f = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$, $R = \mathbb{R}$ és $x_0 \in \{-1, +1\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

5.3. Határozzuk meg az

$$f = 16x^6 + 184x^5 + 657x^4 + 469x^3 - 1124x^2 - 528x + 576 \in \mathbb{R}[x]$$

polinom racionális gyökeit és azok multiplicitását.

6. Derivált, többszörös gyök

6.1. Az $f = x^2 - 3x + \alpha \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak van többszörös gyöke. Határozzuk meg az α valós paraméter értékét.

6.2. Határozzuk meg az a és b együtthatókat úgy, hogy $(x-1)^2 \mid ax^{n+1} + bx^n + 1$ teljesüljön ($n \in \mathbb{N}$).

6.3. Legyen n természetes szám. Igazoljuk, hogy az $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ polinomnak az 1 egész szám háromszoros gyöke.

6.4. Van-e olyan m természetes szám, amelyre $(x^2+x+1)^2 \mid (x+1)^m + x^m + 1$ teljesül?

6.5. Legyenek a és b valós számok. Az $x^{6n+2} + ax^{3n+1} + b \in \mathbb{R}[x]$ polinomok között van-e olyan, amely osztható az $(x^2+x+1)^2$ polinommal?

6.6. Milyen $\lambda \in \mathbb{C}$-re van az $x^3 - 3x + \lambda$, illetve $x^4 - 4x + \lambda$ polinomoknak többszörös gyöke?

6.7. Adjunk eljárást tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomból olyan polinom kiszámítására, amelynek gyökei — egyszeres multplicitással — pontosan azok a komplex számok, amelyek f-nek gyökei.

6.8. Adjunk eljárást tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomból olyan polinom kiszámítására, amelynek gyökei — egyszeres multplicitással — pontosan azok a komplex számok, amelyek f-nek kétszeres gyökei.

6.9. Adjunk eljárást tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomból olyan polinom kiszámítására, amelynek gyökei — egyszeres multplicitással — pontosan azok a komplex számok, amelyek f-nek legfeljebb háromszoros gyökei.

6.10. Mutassuk meg, hogy ha az $f \in \mathbb{R}[x]$ n-edfokú polinomnak ($n \geqslant 2$) n darab páronként különböző valós gyöke van, akkor az f' polinomnak $n-1$ darab páronként különböző valós gyöke van.

7. Harmad- és negyedfokú egyenletek

7.1. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit:

(a) $f = x^3 + 2x + 1$;
(b) $f = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$;
(c) $f = x^3 + 6x^2 + 30x + 25$;
(d) $f = x^3 - 6ix + 4(1-i)$;
(e) $f = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$;
(f) $f = x^3 - 3abfgx + f^3ga^3 + fg^2b^3$, ahol $a, b, f, g \in \mathbb{R}$.

7.2. Legyenek p és q valós számok. Az $x^3 + px + q$ polinom komplex gyökeit jelölje α_1, α_2 és α_3. Igazoljuk, hogy
$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 = -4p^3 - 27q^2.$$
(A $-4p^3 - 27q^2$ kifejezést az $x^3 + px + q$ polinom diszkriminánsának nevezzük.)

7.3. Oldjuk meg az
$$(y^3 - 3by + a^3 - 3ab)^2 - 4(ay + b)^3$$
egyenletet, ahol az a és b paraméterek valósak.

7.4. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit:

(a) $f = x^4 + x^3 + x - 1$;
(b) $f = x^4 + 3x^3 - 3x + 1$;
(c) $f = x^4 + -x^3 - x^2 + 2x - 2$;
(d) $f = x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7$.

8. Lagrange-interpoláció

8.1. Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelyre

(a) $f(k) = k^2 - 1$ $(k \in \{1, 2, 3\})$ és $f(4) = 0$;
(b) $f(1) = 1$, $f(i) = 2$, $f(-1) = 3$, $f(-i) = 4$;
(c) $f(k) = k^2 + (-1)^{k+1}$ $(k \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$;
(d) $f(k) = 2^k$ $(k \in \{1, 2, 3, 4\})$.

8.2. Legyen $n \geqslant 3$ természetes szám és $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ $(k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.)$ Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(\varepsilon_k) = k + 1 \quad (k \in \{0, 1, \dots n-1\})$$

teljesül.

8.3. Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(k) = 2^k \quad (k \in \{0, 1, \dots n\})$$

teljesül $(n \in \mathbb{N})$.

8.4. Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(k) = \frac{1}{k} \quad (k \in \{1, \dots n\})$$

teljesül $(n \in \mathbb{N})$.

9. Szimmetrikus polinomok

9.1. Írjuk fel az alábbi szimmetrikus polinomokat az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként?

(a) $\sigma = x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$;
(b) $\sigma = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n \geqslant 4$;
(c) $\sigma = x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z \in \mathbb{R}[x, y, z]$;
(d) $\sigma = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$;
(e) $\sigma = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i^2 x_j \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n \geqslant 4$;
(f) $\sigma = \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} x_i^3 x_j^2 x_k \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

9.2. Legyen $n \geqslant 3$ tetszőleges természetes szám és $f = 2x^n - 3x^2 + 4x - 6 \in \mathbb{C}[x]$. Az f polinom gyökeit jelölje $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Számítuk ki az alábbi összegeket:

(a) $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$;
(b) $\alpha_1^3 + \cdots + \alpha_n^3$;
(c) $\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}$;
(d) $\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$.

9.3. Legyen $f = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 12 \in \mathbb{C}[x]$. Az f polinom gyökei legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$. Határozzuk meg azt a $g \in \mathbb{C}[x]$ főpolinomot, melynek gyökei:

(a) $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_3 + \alpha_1$;
(b) α_1^2, α_2^2, α_3^2;
(c) $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$;
(d) $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_3 - \alpha_1$.

9.4. Legyen f egész együtthatós főpolinom, melynek mindegyik komplex gyöke 1 abszolútértékű. Igazoljuk, hogy ekkor f minden gyöke egységgyök.

10. Algebrai számok

10.1. Mutassuk meg, hogy az alábbi komplex számok algebrai számok és határozzuk meg a minimálpolinomjukat is.

(a) $\vartheta = \frac{17}{29}$;
(b) $\vartheta = \sqrt{12}$;
(c) $\vartheta = \sqrt{3} + \sqrt{5}$;
(d) $\vartheta = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$;
(e) $\vartheta = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$;
(f) $\vartheta = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$;
(g) $\vartheta = \cos 20°$;
(h) $\vartheta = \sin 15°$;
(i) $\vartheta = \sqrt{3} + i$;
(j) $\vartheta = \sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{3}$.

10.2. Legyen $r \in \mathbb{Q}$ és $k \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ algebrai szám, akkor a

$$-\alpha, \quad \overline{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad r+\alpha, \quad r\alpha \quad \text{és} \quad \sqrt[k]{\alpha}$$

komplex számok is azok. Adjunk becslést a kapott algebrai számok fokára is.

10.3. Mutassuk meg, hogy az α komplex szám pontosan akkor másodfokú algebrai szám, ha vannak olyan s és t racionális számok, amelyekre $\alpha = s + \sqrt{t}$ és $\sqrt{t} \notin \mathbb{Q}$.

10.4. Legyen $f \in \mathbb{Q}[x]$ tetszőleges n-edfokú polinom ($n \in \mathbb{N}$), melynek gyökei legyenek $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{\ell=1}^{n} \deg \alpha_\ell \leqslant n^2. \tag{1}$$

Mikor áll (1)-ben egyenlőség?

10.5. Mutassuk meg, hogy ha (1)-ben szigorú egyenlőtlenség érvényes, akkor

$$\sum_{\ell=1}^{n} \deg \alpha_\ell \leqslant n^2 - 2n + 2$$

is teljesül.

10.6. Mit állíthatunk az α és β komplex számokról, ha

(a) $\alpha \circ \beta$ és $\alpha \bullet \beta$ is algebrai számok,
(b) $\alpha \circ \beta$ algebrai és $\alpha \bullet \beta$ transzcendens szám,
(c) $\alpha \circ \beta$ és $\alpha \bullet \beta$ is transzcendens szám,

ahol $\circ, \bullet \in \{+, -, \cdot, /\}$.

10.7. Mutassuk meg, hogy az $\pi + e$ és $\pi - e$ valós számok valamelyike transzcendens. (Az még ma is megoldatlan probléma, hogy $\pi \pm e$ transzcendens-e.)

10.8. Legyen $f \neq 0$ egész együtthatós polinom. Mutassuk meg, hogy ha $\alpha \in \mathbb{C}$ transzcendens, akkor $f(\alpha)$ is az.

10.9. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

11. Számelmélet integritástartományokban

11.1. Legyen R integritástartomány és $R^* = R \setminus \{0\}$. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

(a) Ha az oszthatósági reláció ekvivalenciareláció az R^* halmazon, akkor R test.

(b) Ha $x \sim y$ teljesül bármely $x, y \in R^*$-ra, akkor R test.

(c) Ha $a \sim b$ és $c \sim d$, akkor $ac \sim bd$.

(d) Ha $a \sim b$ és $c \sim d$, akkor $a + c \sim b + d$.

(e) Ha R^* valamennyi eleme egység vagy prímelem, akkor R test.

11.2. Döntsük el, hogy a megadott R gyűrűben igazak-e az alábbiak:

(a) $i \equiv 1 \pmod{i+1}$, $R = \mathbb{Z}[i]$;

(b) $30 + 12i \equiv 1 + i \pmod{7 - 5i}$, $R = \mathbb{Z}[i]$;

(c) $-17 - 5\sqrt{3}i \equiv -1 \pmod{-5 + i\sqrt{3}}$, $R = \mathbb{Z}[\omega]$, ahol $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(d) $x^5 + x^4 \equiv 2x^2 + 2x + 1 \pmod{x^2 + x + 1}$, $R = \mathbb{Z}[x]$.

11.3. Döntsük el, hogy az 5 egész szám irreducibilis-e a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$ és $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ integritástartományokban?

11.4. Legyen α prímelem a $\mathbb{Z}[i]$ integritástartományban. Mutassuk meg, hogy ekkor az alábbi állítások közül pontosan egy teljesül.

(1) $\alpha \sim 1 + i$;

(2) α prímelem $\mathbb{Z}$-ben és $\alpha \equiv 3 \pmod 4$;

(3) van olyan $p \in \mathbb{Z}$ prímszám, amelyre $p \equiv 1 \pmod 4$ és $\alpha \mid p$.

11.5. Bizonyítsuk be, hogy a $6 - i$ komplex szám prímelem $\mathbb{Z}[i]$-ben.

11.6. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ integritástartományban végtelen sok egység van.

11.7. Határozzuk meg az R euklideszi gyűrűben a megadott elemek legnagyobb közös osztóját:

(a) $v = 19 + 4i$, $w = 1 - 21i$, $R = \mathbb{Z}[i]$;

(b) $v = 19 - 4i$, $w = 1 - 21i$, $R = \mathbb{Z}[i]$;

(c) $f = x^4 + x^3 + x^2$, $g = x^3 + \overline{1}$, $R = \mathbb{Z}_2[x]$;

(d) $f = \overline{2}x^3 + \overline{1}$, $g = \overline{2}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{1}x + \overline{1}$, $R = \mathbb{Z}_3[x]$;

(e) $f = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x - 5$, $g = 2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$, $R = \mathbb{C}[x]$;

(f) $f = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, $g = x^n - nx + n - 1$, $R = \mathbb{Q}[x]$.

11.8. Határozzuk meg az alábbi egyenletek valamennyi megoldását:

(a) $(1 + 3i)u + (3 + i)v = 2008$ ($\mathbb{Z}[i]$-ben);

(b) $(x^6 - 1)u + (x^8 - 1)v = x^4 - 1$ ($\mathbb{Q}[x]$-ben);

(c) $(\overline{3}x^4 + \overline{5}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{6}x + \overline{4})u + (\overline{2}x^4 + \overline{5}x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{4}x + \overline{1})v = x^2 + x + \overline{1}$ ($\mathbb{Z}_7[x]$-ben).

12. Euklideszi gyűrűk és főideálgyűrűk

12.1. Mutassuk meg, hogy a Gauss-egészek $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűje euklideszi gyűrű az $\|a+bi\| = a^2 + b^2$ normával.

12.2. Legyen $I \neq \{0\}$ ideál $\mathbb{Z}[i]$-ben. Mutassuk meg, hogy megadható Gauss-egészeknek olyan véges Z halmaza, amelyre igaz, hogy bármely $w \in \mathbb{Z}[i]$-re van olyan $z \in Z$, hogy $w - z \in I$.

12.3. Legyen $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mutassuk meg, hogy az Euler-egészek $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűje euklideszi gyűrű az $\|a + b\omega\| = a^2 - ab + b^2$ normával.

12.4. Legyen $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}$ és b páratlan$\}$. Definiáljuk az $\oplus$ és $\odot$ műveleteket az alábbi módon ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid b, d$):

$$(a, b) \oplus (c, d) = (ad + bc, bd),$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd).$$

Mutassuk meg, hogy $(R; \oplus, \odot)$ euklideszi gyűrű.

12.5. Határozzuk meg az egységeket a $\mathbb{Z}[i]$ (ld. 199. feladat), $\mathbb{Z}[\omega]$ (ld. 201. feladat) és a 202. feladatban definiált R eukldeszi gyűrűkben.

12.6. Legyen D euklideszi gyűrű a δ euklideszi normával. Mutassuk meg, hogy a maradékos osztásnál kapott hányados és maradék pontosan akkor egyértelmű, ha bármely $a, b \in D$-re

$$\delta(a + b) \leqslant \max\{\delta(a), \delta(b)\}$$

teljesül.

12.7. Legyen D euklideszi gyűrű a δ euklideszi normával, valamint legyen $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ olyan szigorúan monoton leképezés, amelyre $\varphi(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\varphi \circ \delta\colon D \to \mathbb{N}_0,\ d \mapsto \varphi(\delta(d))$$

leképezés is euklideszi norma.

12.8. Legyen D euklideszi gyűrű. Mutassuk meg, hogy ha az $a \in D$ elem euklideszi normája 1, akkor a egység D-ben. Igaz-e az állítás megfordítása.

12.9. Legyen D euklideszi gyűrű és

$$\mathfrak{N}_D = \{\delta\colon D \to \mathbb{N}_0 : \delta \text{ euklideszi norma D-n}\}.$$

Legyen ε az alábbi leképezés:

$$\varepsilon\colon D \to \mathbb{N}_0,\ d \mapsto \min\{\delta(d) : \delta \in \mathfrak{N}_D\}.$$

Mutassuk meg, hogy ε is euklideszi norma, és $a \mid b$ $(a, b \in D)$ esetén $\varepsilon(a) \leqslant \varepsilon(b)$.

12.10. Bitonyítsuk be, hogy egy D integritástartomány pontosan akkor főideálgyűrű, ha van olyan $\nu\colon D \to \mathbb{N}_0$ leképezés, amelyre teljesülnek az alábbiak:

- $\nu(d) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $d = 0$,
- minden olyan $a, b \in D$ elemre, amelyre $b \neq 0$ és $b \nmid a$ teljesül vannak olyan $u, v \in D$ elemek, hogy $0 < \nu(au + bv) < \nu(b)$.

13. Irreducibilitás

13.1. Bontsuk irreducibilis elemek szorzatára az alábbi euklideszi gyűrűk megadott elemeit:

(a) $x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{C}[x]$;
(b) $x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{R}[x]$;
(c) $x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$;
(d) $x^{2n} + 2x^n + 2 \in \mathbb{R}[x]$;
(e) $x^7 - \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$;
(f) $x^7 - \overline{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$;
(g) $3 + 7i \in \mathbb{Z}[i]$;
(h) $3 - 5\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$.

13.2. A Schönemann–Eisenstein-tétel felhasználásával igazoljuk, hogy az

(a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;
(b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;
(c) $x^4 - x^3 + 2x + 1$

polinomok irreducibilies $\mathbb{Q}[x]$-ben.

13.3. Legyen p prímszám és $k \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

$$x^{p^{k-1}} - 1 \mid x^{p^k} - 1$$

teljesül $\mathbb{Z}[x]$-ben. Legyen $X_{p^k} \in \mathbb{Z}[x]$ az a polinom, amelyre $x^{p^k} - 1 = X_{p^k}(x^{p^{k-1}} - 1)$ teljesül. Igazoljuk, hogy az X_{p^k} polinom irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben.

13.4. Legyen $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$ irreducibilis polinom. Mutassuk meg, hogy ekkor f-nek nincs egész gyöke, és nem osztható egyetlen

$$x^2 + \frac{cm - am^2}{d - m^2}x + m$$

alakú polinommal sem, ahol $m \neq d$ egész szám és $m \mid d$.

13.5. Legyen t természetes szám és $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ különböző egész számok. Mutassuk meg, hogy az

$$(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_t) - 1, \quad \text{illetve} \quad (x - \alpha_1)^2 \cdots (x - \alpha_t)^2 + 1$$

egész együtthatós polinomok irreducibilisek.