2. Absztrakt algebrai struktúrák — Csoportok, gyűrűk és testek

2.1. Csoportot alkot-e az A halmaz a $\odot\colon A \times A \to A$ műveletre vonatkozóan?

(a) $A = \mathbb{N}$, $a \odot b = \varphi(a) \cdot \sigma(b)$;
(b) $A = \mathbb{Z}$, $a \odot b = ab + 4(a+b) + 12$;
(c) $A = \{r \in \mathbb{R} : -c < r < c\}$, $a \odot b = \dfrac{a+b}{1+ab/c^2}$;
(d) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b, & \text{ha } a > 0, \\ a/b, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

2.2. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az A halmaz a $\oplus\colon A \times A \to A$ és $\odot\colon A \times A \to A$ műveletekkel? A feladat (d) részében $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) $A = \mathbb{N}$, $a \oplus b = \text{ln.k.o.}(a, b)$ és $a \odot b = \text{lk.k.t.}(a, b)$;
(b) $A = P(\mathbb{Z})$, $a \oplus b = a \Delta b$ és $a \odot b = a \cap b$;
(c) $A = \left\{u + v\sqrt{2} : u, v \in \mathbb{Q}\right\}$, $a \oplus b = a + b$ és $a \odot b = a \cdot b$;
(d) $A = \{u + v\omega : u, v \in \mathbb{Q}\}$, $a \oplus b = a + b$ és $a \odot b = a \cdot b$;
(e) $A = \left\{u + v\sqrt[3]{2} + w\sqrt[3]{4} : u, v, w \in \mathbb{Q}\right\}$, $a \oplus b = a + b$ és $a \odot b = a \cdot b$.

2.3. Mutassa meg, hogy $R_n = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_n : \text{ln.k.o.}(a, n) = 1\}$ csoport az $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$ $(\overline{a}, \overline{b} \in R_n)$ szorzásra vonatkozóan.

> Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{G} = (G; \cdot\,)$ csoport **ciklikus**, ha van olyan $g \in G$ eleme, amelyre $G = \{g^k : k \in \mathbb{Z}\}$ teljesül. A g elemet a csoport **generátorának** nevezzük. Például: a $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}; +\,)$ csoport ciklikus, mert $\mathbb{Z} = \{1^k = k \cdot 1 : k \in \mathbb{Z}\}$; az $R_{10} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}\}$ csoport is ciklikus, mert $R_{10} = \left\{\overline{3}^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2.4. Mely $n \in \{2, 3, 4, 12, 16, 27\}$ természetes számokra ciklikus a redukált maradékosztályok R_n csoportja?

2.5. Legyenek u és v olyan egész számok, amelyekre az $x^2 + ux + v$ polinom gyökei nem egész számok. Jelölje az egyik gyököt ξ, a másik gyököt ξ'. Definiáljuk a $\mathbb{Z}[\xi]$ halmazt a következőképpen:

$$\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Igazolja a következőket:

(a) $\xi \in \mathbb{C}$ nem racionális szám;
(b) Tetszőleges a, a, b, b' egész számokra $a + b\xi = a' + b'\xi$ pontosan akkor teljesül, ha $a = a'$ és $b = b'$;
(c) $\mathbb{Z}[\xi]$ gyűrű a szokásos összeadásra és szorzásra.

2.6. Legyen $\alpha = \sqrt[3]{2}$ és

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}[\alpha]$ gyűrű a szokásos összeadásra és szorzásra?

2.7. Legyen $\alpha = \sqrt[3]{2}$ és
$$R = \{a + b\alpha + c\alpha^2 : a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}.$$
Igaz-e, hogy R gyűrű a szokásos összeadásra és szorzásra?

2.8. Legyen n tetszőleges természetes szám. Mutassa meg, hogy $\mathbb{Z}_n$ pontosan akkor integritástartomány, ha n prímszám.

2.9. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Hány eleme van a
$$\mathcal{P}_{\leqslant n} = \{f \in \mathbb{Z}_2[x] : \deg(f) \leqslant n\}, \quad \text{és a} \quad \mathcal{P}_n = \{f \in \mathbb{Z}_2[x] : \deg(f) = n\}$$
halmazoknak?

2.10. Legyen $(G; \cdot\,)$ tetszőleges csoport. Igazolja, hogy tetszőleges $a, b \in G$ elemekre teljesülnek a következőket.

(a) $o(b^{-1} \cdot a \cdot b) = o(a)$;
(b) $o(a \cdot b) = o(b \cdot a)$.

2.11. Legyen $(G; \cdot\,)$ tetszőleges Abel-csoport. Ha a és b véges rendű elemek G-ben, akkor
$$o(a \cdot b) \mid \text{lk.k.t.}(o(a), o(b)).$$
Amennyiben $\text{ln.k.o.}(o(a), o(b)) = 1$, akkor $o(a \cdot b) = o(a)o(b)$ is teljesül.

2.12. Legyen $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $G \subseteq \mathbb{R}^\times$, és tegyük fel, hogy $(G; \cdot\,)$ csoport. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}^\times \setminus G; \cdot\,)$ nem csoport.

2.13. Legyen A véges halmaz, és jelölje $T(A)$ az A halmaz összes transzformációinak halmazát, valamint jelölje $\circ$ a leképezésszorzást. Döntse el, hogy a $(T(A); \circ\,)$ algebra

(a) félcsoport-e;
(b) kommutatív félcsoport-e;
(c) monoid-e.

Amennyiben $(T(A); \circ\,)$ monoid, akkor van-e minden elemnek bal-, illetve jobbinverze?

2.14. Adjon meg olyan gyűrűt, amely

(a) egységelemes és kommutatív, de nem zérusosztómentes;
(b) egységelemes és zérusosztómentes, de nem kommutatív;
(c) kommutatív és zérusosztómentes, de nem egységelemes.