1. Komplex számok

Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ekkor $\arg z$ az a $[0, 2\pi)$ intervallumba eső valós szám, amelyre $z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$ teljesül; $\arg z$ a z komplex szám **argumentuma**.

1.1. Legyen $v = -2 + 3i$ és $w = 2 + 3i$. Határozza meg az alábbi komplex számok kanonikus alakját.

(a) $z = (1 + i)v + (2 - i)w$;

(b) $z = v - \overline{w}$;

(c) $z = v \cdot w$;

(d) $z = \dfrac{v}{w}$;

(e) $\overline{v^2 \cdot \overline{w}} \cdot \dfrac{v - w}{\overline{v} + \overline{w}}$;

(f) $\dfrac{\overline{v} \cdot w^2 - \overline{w} \cdot v^2}{v + w}$.

1.2. Határozza meg a 0, ± 1, $1 \pm i$, $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2} i$ komplex számok trigonometrikus alakját.

1.3. Legyen $v = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$ és $w = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$. Határozza meg az alábbi komplex számok kanonikus és trigonometrikus alakját.

(a) $z = -v^{2009} \cdot i + w^{2011}$;

(b) $z = \dfrac{v^{2013}}{w^{2015}}$;

(c) $z = (v \cdot \overline{w})^{2017}$;

(d) $z = \dfrac{v}{w}$.

1.4. Határozza meg az alábbi egyenletek valamennyi megoldását a komplex számok halmazán.

(a) $|z| - z = 1 + 2i$;

(b) $z^2 + |z| = 0$;

(c) $(1 + i) \cdot z^2 = 3 + 2i$;

(d) $z^2 + (1 - i) \cdot z + (2 + 3i) = 0$;

(e) $i \cdot \overline{z} = z^2$;

(f) $z^2 - \overline{z}^3 = 1$.

1.5. Mutassa meg, hogy tetszőleges z komplex számra teljesülnek a

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &\leqslant |z|, \\ \mathrm{Im}(z) &\leqslant |z|, \\ |z| &\leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek.

1.6. Igazolja, hogy tetszőleges v és w komplex számra teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} |v + w| &\leqslant |v| + |w|, \\ |v| - |w| &\leqslant |v - w|. \end{aligned}$$

1.7. Bizonyítsa be, hogy a

$$|v + w|^2 + |v - w|^2 = 2(|v|^2 + |w|^2)$$

egyenlőség bármely $v, w \in \mathbb{C}$-re teljesül.

1.8. Legyen z olyan komplex szám, melynek abszolútértéke 2. Mutassa meg, hogy $2 \leqslant |z-4| \leqslant 6$.

1.9. Legyen z olyan komplex szám, melynek abszolútértéke 3. Mutassa meg, hogy $\dfrac{8}{11} \leqslant \left|\dfrac{z^2+1}{z^2+2}\right| \leqslant \dfrac{10}{7}$.

1.10. Bizonyítsa be, hogy ha a z komplex szám abszolútértéke $r > 2$, akkor

$$\left|\frac{1}{z^2+z+1}\right| \leqslant \frac{1}{r^2-r-1}.$$

1.11. Hol helyezkednek el a komplex számsíkon azok a z pontok, amelyekre

(a) $|z| < 1$, $|z| = 1$, $|z| \geqslant 1$;

(b) $\arg z \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$, $\arg z > \frac{\pi}{4}$;

(c) $\left|\dfrac{z+1}{z+4}\right| = 2$;

(d) $\left|\dfrac{z+2+i}{z+3-i}\right| \leqslant \sqrt{2}$;

(e) $\left|\dfrac{z+2+i}{z+3-i}\right| = 1$;

(f) $|z| \arg z = \frac{\pi}{2}$;

(g) $|z| + \arg z \geqslant 1$;

(h) $|z+1| = |2z-1|$

teljesül?

1.12. Legyenek z_1, z_2 és z_3 a komplex számsík pontjai. Mutassa meg, hogy a pontok pontosan akkor illeszkednek egy egyenesre, ha $z_1(\overline{z_2}-\overline{z_3}) + z_2(\overline{z_3}-\overline{z_1}) + z_3(\overline{z_1}-\overline{z_2}) = 0$.

1.13. Legyenek z_1, z_2 és z_3 a komplex számsík különböző pontjai. Mutassa meg, hogy a pontok pontosan akkor csúcsai egy szabályos háromszögnek, ha $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.

1.14. Adja meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, amelynek két szomszédos csúcsa a $v = 3-i$ és $w = 1-2i$ komplex szám.

1.15. Legyen $v, w \in \mathbb{C}$. Bizonyítsa be, hogy $\arg v = 2 \arg w$ pontosan akkor teljesül, ha $\bar{v}w^2$ pozitív valós szám.

1.16. Legyenek z_1, z_2 és z_3 a komplex számsík olyan páronként különböző pontjai, amelyek abszolútértéke 1. Igazoljuk, hogy $\arg \dfrac{z_1}{z_2} = 2 \arg \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$.

1.17. Mutassa meg, hogy az $f\colon \mathbb{C} \to \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$, $z \mapsto \dfrac{z}{1+|z|}$ leképezés bijekció.

1.18. Legyen $\omega = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Határozza meg az alábbi komplex számok kanonikus alakját:

(a) ω^{7919};

(b) $\sqrt[7]{\omega+1}$;

(c) $\sqrt[7]{\overline{\omega} - \omega^2}$;

(d) $\sqrt[6]{(1-i)\cdot\omega}$.

1.19. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

(a) $z^8 + i = 0$;

(b) $z^4 + 4 = 0$;

(c) $z^6 = 1 + i$;

(d) $z^6 = i$.

1.20. Legyen $z_\alpha = \cos\alpha + i \sin\alpha$, ahol $\alpha \in [0, 2\pi)$. Határozza meg a $z_\alpha - 1$ és $z_\alpha + 1$ komplex számok trigonometrikus alakját.

1.21. Mutassa meg, hogy

$$\cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos n\vartheta = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \sin\frac{\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}.$$

1.22. Határozza meg a felső félsíkba eső 12-edik egységgyököket. Melyek lesznek ezek közül primitív 12-edik egyéggyökök.

1.23. Legyen n tetszőleges természetes szám és $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ n-edik egységgyök. Igazolja, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k w^{k-1} = \frac{n}{w-1} \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 w^{k-1} = \frac{n^2}{w-1} - \frac{2n}{(w-1)^2}.$$

1.24. Legyen n tetszőleges természetes szám. Határozza meg az n-edik primitív egységgyökök szorzatát és összegét.

1.25. Jelölje E_n az n-edik egységgyökök, P_n pedig az n-edik primitív egységgyökök halmazát. Igazolja, hogy tetszőleges $m, n \geqslant 1$ egészekre teljesülnek az alábbiak:

(a) $E_m \cap E_n = E_{\text{ln.k.o.}(m,n)}$;
(b) ha $\varepsilon \in P_m$, akkor $\varepsilon^n \in P_{m/\text{ln.k.o.}(m,n)}$;
(c) $E_n = \bigcup_{d|n} P_d$.

1.26. Van-e olyan z komplex szám, amelyre z és $z+1$ is egységgyök?

1.27. Legyen n tetszőleges természetes szám és legyen $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}$, ahol $0 \leqslant k < n$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^2$;

(b) $\displaystyle\prod_{0\leqslant j<k<n}^{n} \varepsilon_j \varepsilon_k$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^3$;

(d) $\displaystyle\prod_{0\leqslant j<k<l<n}^{n} \varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_l$.

1.28. Legyen n tetszőleges természetes szám. Hozza zárt alakra az alábbi összegeket:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/4]} \binom{n}{4k}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/4]} (-1)^k \binom{n}{4k}$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/3]} \binom{n}{3k}$.

1.29. Határozza meg az $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ komplex szám trigonometrikus alakját, ahol $\alpha \in [0, 2\pi)$ és $n \in \mathbb{N}$.

1.30. Igazolja, hogy

$$\left(\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}n\alpha},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\alpha \neq (2k+1) \cdot \dfrac{\pi}{2n}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1.31. Tegyük fel, hogy a $z \in \mathbb{C}$ komplex számra és az $\alpha \in \mathbb{R}$ valós számra teljesül, hogy $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha$. Bizonyítsa be, hogy ekkor tetszőleges n természetes számra igaz, hogy $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$.

1.32. Le lehet-e fedni egy 6×10-es sakktáblát 1×4-es dominókkal (egyrétűen és hézagmentesen)?

1.33. Mutassa meg, hogy

$$4 \cdot \mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

1.34. Határozza meg $\cos 72^\circ$ értékét.