Az Európai Matematika Kezdete

Klukovits Lajos, Dormán Miklós

TTIK Bolyai Intézet

2010. november 26.

Az európai civilizáció kezdete

‘nem-görög’ területek

A folyammenti kultúrák kora.

A folyammenti kultúrák kora.

- Kevés kivétellel primitív törzsek lakják (zömmel gót és germán törzsek).

A folyammenti kultúrák kora.

- Kevés kivétellel primitív törzsek lakják (zömmel gót és germán törzsek).
- Nyílt, vendégszerető, nyughatatlan, iszákos és feleségeikre büszke népek (TACITUS).

A folyammenti kultúrák kora.

- Kevés kivétellel primitív törzsek lakják (zömmel gót és germán törzsek).
- Nyílt, vendégszerető, nyughatatlan, iszákos és feleségeikre büszke népek (TACITUS).

Az ókor vége, a korai középkor.

A folyammenti kultúrák kora.

- Kevés kivétellel primitív törzsek lakják (zömmel gót és germán törzsek).
- Nyílt, vendégszerető, nyughatatlan, iszákos és feleségeikre büszke népek (Tacitus).

Az ókor vége, a korai középkor.

253-tól a Római Birodalom erjedése, lassú fölbomlása, keresztényüldözések. Kialakul lassan a két császárság, a két birodalom.

A folyammenti kultúrák kora.

- Kevés kivétellel primitív törzsek lakják (zömmel gót és germán törzsek).
- Nyílt, vendégszerető, nyughatatlan, iszákos és feleségeikre büszke népek (TACITUS).

Az ókor vége, a korai középkor.

253-tól a Római Birodalom erjedése, lassú fölbomlása, keresztényüldözések. Kialakul lassan a két császárság, a két birodalom.

IV. századtól megindul a népvándorlás: hunok, avarok; támadások Róma ellen.

A folyammenti kultúrák kora.

- Kevés kivétellel primitív törzsek lakják (zömmel gót és germán törzsek).
- Nyílt, vendégszerető, nyughatatlan, iszákos és feleségeikre büszke népek (Tacitus).

Az ókor vége, a korai középkor.

253-tól a Római Birodalom erjedése, lassú fölbomlása, keresztényüldözések. Kialakul lassan a két császárság, a két birodalom.

IV. századtól megindul a népvándorlás: hunok, avarok; támadások Róma ellen.

381 II. Egyetemes Konstantinápolyi Zsinat, a keresztény hitvallás végleges megfogalmazása.

Az ókor vége, a korai középkor.

Az ókor vége, a korai középkor.

391 A kereszténység államvallás a keleti birodalomban.

Az ókor vége, a korai középkor.

391 A kereszténység államvallás a keleti birodalomban.

434-452 Attila hódításai; a Hun Birodalom az Uraltól a Rajnáig terjed, melynek központja a Kárpát medencében van.

Az ókor vége, a korai középkor.

391 A kereszténység államvallás a keleti birodalomban.

434-452 Attila hódításai; a Hun Birodalom az Uraltól a Rajnáig terjed, melynek központja a Kárpát medencében van.

451 a catalaunumi csata, elvezet a Nyugatrómai Birodalom bukásához.

Az ókor vége, a korai középkor.

391 A kereszténység államvallás a keleti birodalomban.

434-452 ATTILA hódításai; a Hun Birodalom az Uraltól a Rajnáig terjed, melynek központja a Kárpát medencében van.

451 a catalaunumi csata, elvezet a Nyugatrómai Birodalom bukásához.

451-511 a Frank Állam megalapítása (I. CHLODVIG).

Az ókor vége, a korai középkor.

391 A kereszténység államvallás a keleti birodalomban.

434-452 Attila hódításai; a Hun Birodalom az Uraltól a Rajnáig terjed, melynek központja a Kárpát medencében van.

451 a catalaunumi csata, elvezet a Nyugatrómai Birodalom bukásához.

451-511 a Frank Állam megalapítása (I. Chlodvig).

529 A nyugati szerzetesség megalapítása, Nursiai Szent Benedek kolostort alapít Monte Cassinon, Benedek rend.

Az ókor vége, a korai középkor.

391 A kereszténység államvallás a keleti birodalomban.

434-452 ATTILA hódításai; a Hun Birodalom az Uraltól a Rajnáig terjed, melynek központja a Kárpát medencében van.

451 a catalaunumi csata, elvezet a Nyugatrómai Birodalom bukásához.

451-511 a Frank Állam megalapítása (I. CHLODVIG).

529 A nyugati szerzetesség megalapítása, NURSIAI SZENT BENEDEK kolostort alapít Monte Cassinon, Benedek rend.

További rendek, kolostorok, bennük iskolák.

Az első egyetemek

A VIII. századtól az egyes (világi) uralokodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. NAGY KÁROLY meghívja iskolájába a yorki ALCUIN-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

A VIII. századtól az egyes (világi) uralokodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. NAGY KÁROLY meghívja iskolájába a yorki ALCUIN-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

A legkorábbi egyetemek.

A VIII. századtól az egyes (világi) uralokodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. Nagy Károly meghívja iskolájába a yorki Alcuin-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

A legkorábbi egyetemek.

1088 Bologna,

A VIII. századtól az egyes (világi) uralokodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. NAGY KÁROLY meghívja iskolájába a yorki ALCUIN-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

A legkorábbi egyetemek.

1088 Bologna,

1150 Párizs 1150,

A VIII. századtól az egyes (világi) uralokodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. NAGY KÁROLY meghívja iskolájába a yorki ALCUIN-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

A legkorábbi egyetemek.

1088 Bologna,

1150 Párizs 1150,

1167 Oxford 1167,

A VIII. századtól az egyes (világi) uralokodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. NAGY KÁROLY meghívja iskolájába a yorki ALCUIN-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

A legkorábbi egyetemek.

1088 Bologna,

1150 Párizs 1150,

1167 Oxford 1167,

1239 Salamanca 1239 (III. Ferdinánd Kasztilia királya),

A VIII. századtól az egyes (világi) uralokodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. NAGY KÁROLY meghívja iskolájába a yorki ALCUIN-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

A legkorábbi egyetemek.

1088 Bologna,

1150 Párizs 1150,

1167 Oxford 1167,

1239 Salamanca 1239 (III. Ferdinánd Kasztilia királya),

1364 Krakkó 1364 (III. Kázmér),

A VIII. századtól az egyes (világi) uralokodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. Nagy Károly meghívja iskolájába a yorki Alcuin-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsőnek a zene.

A legkorábbi egyetemek.

1088 Bologna,

1150 Párizs 1150,

1167 Oxford 1167,

1239 Salamanca 1239 (III. Ferdinánd Kasztilia királya),

1364 Krakkó 1364 (III. Kázmér),

továbbiak a XII-XV. században: Bázel, Bécs, Heidelberg, Lipcse, Prága, Salerno, ...

Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai

Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai

- Egyik sem független az egyháztól.

Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai

- Egyik sem független az egyháztól.
- Az oktatás nyelve a **latin**. Általánosan ez marad a XVIII. századig.

Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai

- Egyik sem független az egyháztól.
- Az oktatás nyelve a **latin**. Általánosan ez marad a XVIII. századig.

Az elérhető ismeretanyag.

Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai

- Egyik sem független az egyháztól.
- Az oktatás nyelve a **latin**. Általánosan ez marad a XVIII. századig.

Az elérhető ismeretanyag.

- Kezdetben csak latin (római) forrásokra támaszkodik.

Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai

- Egyik sem független az egyháztól.
- Az oktatás nyelve a **latin**. Általánosan ez marad a XVIII. századig.

Az elérhető ismeretanyag.

- Kezdetben csak latin (római) forrásokra támaszkodik.
- A római matematika igen kezdetleges (számírás!), egyszerű és praktikus aritmetika csupán.

Az első egyetemek legfőbb jellemvonásai

- Egyik sem független az egyháztól.
- Az oktatás nyelve a **latin**. Általánosan ez marad a XVIII. századig.

Az elérhető ismeretanyag.

- Kezdetben csak latin (római) forrásokra támaszkodik.
- A római matematika igen kezdetleges (számírás!), egyszerű és praktikus aritmetika csupán.
- Elérhető néhány görög mű, de nem autentikus, alacsony színvonalú latin fordításban.

A továbblépés kezdete

Severinus Boethius (480-524)

Severinus Boethius (480-524)

- Ősi római család sarja. Az első nem iszlám tudós, aki eredeti görög források alapján traktátusokat (értekezéseket, tanulmányokat) állít össze elemi aritmetikából és geometriából. Lefordította Euklidész I. és II. könyvét, de a bizonyításokat elhagyta.

Severinus Boethius (480-524)

- Ősi római család sarja. Az első nem iszlám tudós, aki eredeti görög források alapján traktátusokat (értekezéseket, tanulmányokat) állít össze elemi aritmetikából és geometriából. Lefordította Euklidész I. és II. könyvét, de a bizonyításokat elhagyta.
- Mellékelt néhány (részben hibás) geometriai számítást (pl. nem utalt azok közelítő jellegére). Számolások abakuszon.

SEVERINUS BOETHIUS (480-524)

- Ősi római család sarja. Az első nem iszlám tudós, aki eredeti görög források alapján traktátusokat (értekezéseket, tanulmányokat) állít össze elemi aritmetikából és geometriából. Lefordította EUKLIDÉSZ I. és II. könyvét, de a bizonyításokat elhagyta.
- Mellékelt néhány (részben hibás) geometriai számítást (pl. nem utalt azok közelítő jellegére). Számolások abakuszon.
- NIKOMACHOSZ Aritmetikáját, ARISZTOTELÉSZ, KLAUDIOSZ PTOLEMAIOSZ egyes műveit is latinra fordította.

Severinus Boethius (480-524)

- Ősi római család sarja. Az első nem iszlám tudós, aki eredeti görög források alapján traktátusokat (értekezéseket, tanulmányokat) állít össze elemi aritmetikából és geometriából. Lefordította Euklidész I. és II. könyvét, de a bizonyításokat elhagyta.
- Mellékelt néhány (részben hibás) geometriai számítást (pl. nem utalt azok közelítő jellegére). Számolások abakuszon.
- Nikomachosz Aritmetikáját, Arisztotelész, Klaudiosz Ptolemaiosz egyes műveit is latinra fordította.
- Keveset érthetett meg a lefordított művekből, matematikája tisztán empirikus.

Severinus Boethius (480-524)

- Ősi római család sarja. Az első nem iszlám tudós, aki eredeti görög források alapján traktátusokat (értekezéseket, tanulmányokat) állít össze elemi aritmetikából és geometriából. Lefordította Euklidész I. és II. könyvét, de a bizonyításokat elhagyta.
- Mellékelt néhány (részben hibás) geometriai számítást (pl. nem utalt azok közelítő jellegére). Számolások abakuszon.
- Nikomachosz Aritmetikáját, Arisztotelész, Klaudiosz Ptolemaiosz egyes műveit is latinra fordította.
- Keveset érthetett meg a lefordított művekből, matematikája tisztán empirikus.
- Leghíresebb műve: *Consolitiones Philosophicae* (A Filozófia Vigasztalása), amit gyaníthatóan fogsága (hitszegés) alatt írt.

Gerbert D'Aurillac (950(?)–1003)

Gerbert d'Aurillac (950(?)–1003)

- *Libellus de numerorum divisione* (Könyvecske a számok osztásáról), $\sqrt{3} \approx \frac{12}{7} = 1,714\ldots$.

Gerbert D'Aurillac (950(?)–1003)

- *Libellus de numerorum divisione* (Könyvecske a számok osztásáról), $\sqrt{3} \approx \frac{12}{7} = 1,714\ldots$.
- Gerbert-szabály: $\cos\alpha = \cos a \sin\beta$ (gömbi derékszögű háromszögben, a befogó, β a rajta levő hegyesszög).

„YORKI” ALCUIN (735-804)

„YORKI” ALCUIN (735-804)

- Nagy Károly hívta az udvarába.

„yorki” Alcuin (735-804)

- Nagy Károly hívta az udvarába.
- Szintén írt matematikai és rejtvényes tanító traktátusokat.

„YORKI" ALCUIN (735-804)

- Nagy Károly hívta az udvarába.
- Szintén írt matematikai és rejtvényes tanító traktátusokat.
- Egy elhíresült mondása: „A mai emberiség a vízözönt Noé bárkájában túlélt 8 lélek leszámazottja, ezért kevésbé tökéletes, mint a teremtés eredeti emberisége."

„YORKI” ALCUIN (735-804)

- Nagy Károly hívta az udvarába.
- Szintén írt matematikai és rejtvényes tanító traktátusokat.
- Egy elhíresült mondása: „A mai emberiség a vízözönt Noé bárkájában túlélt 8 lélek leszámazottja, ezért kevésbé tökéletes, mint a teremtés eredeti emberisége.”
- Egy rejtvénye: *100 kosár gabonát osztunk szét úgy, hogy minden férfi 5 kosárral, minden nő 2 kosárral és minden gyerek 1/2 kosárral kap. Hány férfi, nő és gyerek között osztottuk szét a gabonát?*

A matematika szerepe a korai középkorban

A matematika szerepe a korai középkorban

- Boetius: *Quadrivium*: aritmetika, geometria, csillagászat, zene; hosszú ideig ezt oktatták a teológia mellett.

A matematika szerepe a korai középkorban

- Boetius: *Quadrivium*: aritmetika, geometria, csillagászat, zene; hosszú ideig ezt oktatták a teológia mellett.
- Később *Trivium*: quadrivium, retorika, dialektika (a vitatkozás művészete, vö.: hitviták).

A matematika szerepe a korai középkorban

- Boetius: *Quadrivium*: aritmetika, geometria, csillagászat, zene; hosszú ideig ezt oktatták a teológia mellett.
- Később *Trivium*: quadrivium, retorika, dialektika (a vitatkozás művészete, vö.: hitviták).
- Érdekes egyházi vélemény: a matematika (aritmetika, geometria) azért fontos, mert „ez készít föl a legjobban a hitvitákban való eredményes szereplésre", de fontos a változó idejű ünnepnapok meghatározásában is.

A matematika szerepe a korai középkorban

- Boetius: *Quadrivium*: aritmetika, geometria, csillagászat, zene; hosszú ideig ezt oktatták a teológia mellett.
- Később *Trivium*: quadrivium, retorika, dialektika (a vitatkozás művészete, vö.: hitviták).
- Érdekes egyházi vélemény: a matematika (aritmetika, geometria) azért fontos, mert „ez készít föl a legjobban a hitvitákban való eredményes szereplésre”, de fontos a változó idejű ünnepnapok meghatározásában is.
- A matematika fontossága az asztrológiában, az udvari asztrológusok kitüntetett szerepe. Nagy szerepe volt ezért az orvoslásban is: még a XVI. században is inkább asztrológusok, matematikusok és alkimisták oktattak az egyetemeken, az igazi csillagász ritkaság. Galilei is asztrológia címszó alatt oktatott (orvosokat is).

A görög tudományosság első föléledése.

A görög tudományosság első föléledése.

- Az európai (feudális alapú) civiláció megerősödése 1100-tól, az államrendszer stabilizálódása.

A görög tudományosság első föléledése.

- Az európai (feudális alapú) civiláció megerősödése 1100-tól, az államrendszer stabilizálódása.
- Az első manufakturák, kereskedelmi kapcsolatok az államokon belül és között, keleti kapcsolatok.

A görög tudományosság első föléledése.

- Az európai (feudális alapú) civiláció megerősödése 1100-tól, az államrendszer stabilizálódása.
- Az első manufakturák, kereskedelmi kapcsolatok az államokon belül és között, keleti kapcsolatok.
- Az „ülő kereskedők” megjelenése, „kereskedelmi kirendeltségek” létrejötte. Hitelezések.

A görög tudományosság első föléledése.

- Az európai (feudális alapú) civiláció megerősödése 1100-tól, az államrendszer stabilizálódása.
- Az első manufakturák, kereskedelmi kapcsolatok az államokon belül és között, keleti kapcsolatok.
- Az „ülő kereskedők” megjelenése, „kereskedelmi kirendeltségek” létrejötte. Hitelezések.
- Kapcsolat a „hispániai mór államokkal”: tudomány, mecsetiskolák.

A görög tudományosság első föléledése.

- Az európai (feudális alapú) civiláció megerősödése 1100-tól, az államrendszer stabilizálódása.
- Az első manufakturák, kereskedelmi kapcsolatok az államokon belül és között, keleti kapcsolatok.
- Az „ülő kereskedők” megjelenése, „kereskedelmi kirendeltségek” létrejötte. Hitelezések.
- Kapcsolat a „hispániai mór államokkal”: tudomány, mecsetiskolák.
- Roger Bacon (1214-94) az első tudós, akit „eltiltottak az írástól”, de pápai megbízásból filozófiával foglalkozhatott. Ő –ellentétben legtöbb kortársával– előnyben részesítette a kísérleteket a spekulációval (skolasztikával) szemben.

A Pisai Leonardo, azaz Fibonacci

Az első „igazi” európai matematikus

A pisai Leonardo (1170-1250)

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

A PISAI LEONARDO (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228),

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228),

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228), azaz Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve,

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228), azaz Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve,
  Practica geometrie (1220),

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228), azaz Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve,
  Practica geometrie (1220),
  Flos (1225),

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228), azaz Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve,
  Practica geometrie (1220),
  Flos (1225),

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228), azaz Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve,
  Practica geometrie (1220),
  Flos (1225), azaz „Virágocska", zömmel gazdasági számításokat tartalmaz, de néhány elméleti problémát is,

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228), azaz Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve,
  Practica geometrie (1220),
  Flos (1225), azaz „Virágocska”, zömmel gazdasági számításokat tartalmaz, de néhány elméleti problémát is,
  Liber quadratorum (1225),

A PISAI LEONARDO (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228), azaz Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve,
  Practica geometrie (1220),
  Flos (1225), azaz „Virágocska", zömmel gazdasági számításokat tartalmaz, de néhány elméleti problémát is,
  Liber quadratorum (1225),

A pisai Leonardo (1170-1250)

- Tanulmányai (Bougie), utazásai (Egyiptom, Szíria, Bizánc, Szicília, Provance).
- Művei:

  Liber abaci (1202, 1228), azaz Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve,
  Practica geometrie (1220),
  Flos (1225), azaz „Virágocska”, zömmel gazdasági számításokat tartalmaz, de néhány elméleti problémát is,
  Liber quadratorum (1225), azaz Négyzetszámok könyve.

Liber abaci

Aritmetika.

Aritmetika.

- A „hindu-arab” számjegyek előnyben részesítését szorgalmazta.

Aritmetika.

- A „hindu-arab” számjegyek előnyben részesítését szorgalmazta.
- A mai értelembe vett törtek és az egységtörtek (az 1 számlálójú törtek) közötti konverzió:

$$\frac{98}{100} = \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

Aritmetika.

- A „hindu-arab” számjegyek előnyben részesítését szorgalmazta.
- A mai értelembe vett törtek és az egységtörtek (az 1 számlálójú törtek) közötti konverzió:

$$\frac{98}{100} = \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

- Egy érdekes jelölésrendszere:

$$\frac{1\ 6\ 2}{2\ 9\ 10} = \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{6}{9 \cdot 10} + \frac{2}{10}.$$

Egy érdekes feladat a XII. fejezetből.

7 anyóka mendegél Róma felé,
minden anyókával mendegél 7 öszvér,
minden öszvéren 7 zsák van,
minden zsákban 7 kenyér van,
minden kenyér mellett 7 kés van,
minden kés 7 tokban van.
Mennyi mindezek összege?

E feladat egy régebbi változat a RHIND papirusz 79. feladata.

E feladat egy régebbi változat a RHIND papirusz 79. feladata.

- *Van* 7 *ház*, 49 *macska*, 343 *egér*, 2401 *kalász*, 16807 *búzaszem*.

E feladat egy régebbi változat a RHIND papirusz 79. feladata.

- *Van* 7 *ház*, 49 *macska*, 343 *egér*, 2401 *kalász*, 16807 *búzaszem.*

E feladat egy régebbi változat a RHIND papirusz 79. feladata.

- *Van 7 ház*, 49 *macska*, 343 *egér*, 2401 *kalász*, 16807 *búzaszem.* Vélhetően a következő feladatról van szó:

E feladat egy régebbi változat a RHIND papirusz 79. feladata.

- *Van* 7 *ház*, 49 *macska*, 343 *egér*, 2401 *kalász*, 16807 *búzaszem.* Vélhetően a következő feladatról van szó:

  Ha van 7 *ház,*
  minden házban 7 *macska,*
  minden macska megeszik 7 *egeret,*
  minden egér elpusztítana 7 *kalászt,*
  és minden kalászban 7 *mag van,*
  akkor hány szem gabona menekül meg?

Középkori orosz kézírat.

Mendegél 7 anyóka,
minden anyókánál 7 bot van,
minden boton 7 ágacska,
minden ágacskán 7 tarisznya,
minden tarisznyában 7 lepény,
minden lepényben 7 veréb,
minden verébben 7 zúza.
Mennyi ez összesen?

XIX. századi angol mondóka (nursery rhyme).

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives,
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits,
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?

A probléma, amelyet mindenki ismer.

Hány pár nyúlra szaporodik egy év alatt a kezdeti pár, ha tudjuk, a nyulak két hónap alatt válnak ivaréretté, és ezután minden pár minden hónapban egy új párnak ad életet és mindegyikük életben marad?

A probléma, amelyet mindenki ismer.

Hány pár nyúlra szaporodik egy év alatt a kezdeti pár, ha tudjuk, a nyulak két hónap alatt válnak ivaréretté, és ezután minden pár minden hónapban egy új párnak ad életet és mindegyikük életben marad?

A válasz:

144.

Határozatlan egyenletekre vezető problémák 1.

Határozatlan egyenletekre vezető problémák 1.

A 30 madár probléma.

Egy ember 30 madarat vásárol: foglyokat, galambokat és verebeket. A fogoly ára darabonkint 3 ezüst, a galamboké 2, míg a verebeké $\frac{1}{2}$. Összesen 30 ezüstöt fizet. Hány madarat vett az egyes fajtákból?

Határozatlan egyenletekre vezető problémák 1.

A 30 madár probléma.

Egy ember 30 madarat vásárol: foglyokat, galambokat és verebeket. A fogoly ára darabonkint 3 ezüst, a galamboké 2, míg a verebeké $\frac{1}{2}$*. Összesen 30 ezüstöt fizet. Hány madarat vett az egyes fajtákból?*

Határozatlan egyenletekre vezető problémák 1.

A 30 madár probléma.

Egy ember 30 madarat vásárol: foglyokat, galambokat és verebeket. A fogoly ára darabonkint 3 ezüst, a galamboké 2, míg a verebeké $\frac{1}{2}$. Összesen 30 ezüstöt fizet. Hány madarat vett az egyes fajtákból?

Megoldás. A feladat az

$$x + y + z = 30, \qquad 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30$$

határozatlan egyenletrendszerre vezet, amelynek egyetlen pozitív megoldása az $x = 3,\ y = 5,\ z = 22$.

Határozatlan egyenletekre vezető problémák 1.

A 30 madár probléma.

Egy ember 30 madarat vásárol: foglyokat, galambokat és verebeket. A fogoly ára darabonkint 3 ezüst, a galamboké 2, míg a verebeké $\frac{1}{2}$. Összesen 30 ezüstöt fizet. Hány madarat vett az egyes fajtákból?

Megoldás. A feladat az

$$x + y + z = 30, \qquad 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30$$

határozatlan egyenletrendszerre vezet, amelynek egyetlen pozitív megoldása az $x = 3,\ y = 5,\ z = 22$.
Vö.: A „100 madár probléma" (ókori kínai, hindu és kora-középkori arab források).

1. Lóvásárlási probléma.

Az egyik ember azt mondja a másiknak: ha nekem adod pénzed egyharmadát, akkor meg tudom venni a lovat. Erre a másik úgy válaszol, hogy ha te pedig a pénzed negyedét adod nekem, akkor én tudom megvenni a lovat.

1. Lóvásárlási probléma.

Az egyik ember azt mondja a másiknak: ha nekem adod pénzed egyharmadát, akkor meg tudom venni a lovat. Erre a másik úgy válaszol, hogy ha te pedig a pénzed negyedét adod nekem, akkor én tudom megvenni a lovat.

1. Lóvásárlási probléma.

Az egyik ember azt mondja a másiknak: ha nekem adod pénzed egyharmadát, akkor meg tudom venni a lovat. Erre a másik úgy válaszol, hogy ha te pedig a pénzed negyedét adod nekem, akkor én tudom megvenni a lovat.

Megoldás. Ha s a ló ára, akkor megoldandó az

$$x + \frac{1}{3}y = s, \qquad y + \frac{1}{4}x = s$$

egyenletrendszer, ahol x és y a „kupecek” pénze.

1. Lóvásárlási probléma.

Az egyik ember azt mondja a másiknak: ha nekem adod pénzed egyharmadát, akkor meg tudom venni a lovat. Erre a másik úgy válaszol, hogy ha te pedig a pénzed negyedét adod nekem, akkor én tudom megvenni a lovat.

Megoldás. Ha s a ló ára, akkor megoldandó az

$$x + \frac{1}{3}y = s, \qquad y + \frac{1}{4}x = s$$

egyenletrendszer, ahol x és y a „kupecek" pénze. A legkisebb egész megoldás:

$$\begin{aligned} x &= (3-1)\cdot 4 = 8, \\ y &= (4-1)\cdot 3 = 9, \\ s &= 3\cdot 4 - 1\cdot 1 = 11. \end{aligned}$$

2. Lóvásárlási probléma (általánosítás 3 kupecre)

A megoldandó egyenletrendszer most

$$x + \frac{1}{3}(y + z) = s,$$
$$y + \frac{1}{4}(x + z) = s,$$
$$z + \frac{1}{5}(x + y) = s.$$

Megoldás. Új határozatlant vezet be: $t = x + y + z$.

Megoldás. Új határozatlant vezet be: $t = x + y + z$. Kivonja belőle mindhárom korábbi egyenletét:

$$\frac{2}{3}(y+z) = \frac{3}{4}(x+z) = \frac{4}{5}(x+y) = t - s = D.$$

Megoldás. Új határozatlant vezet be: $t = x + y + z$. Kivonja belőle mindhárom korábbi egyenletét:

$$\frac{2}{3}(y+z) = \frac{3}{4}(x+z) = \frac{4}{5}(x+y) = t - s = D.$$

Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} y + z &= \frac{3}{2}D, \\ x + z &= \frac{4}{3}D, \\ x + y &= \frac{5}{4}D. \end{aligned}$$

Mivel x-re, y-ra és z-re egész értékeket akar kapni, ezért D-t 24-nek választja,

Mivel x-re, y-ra és z-re egész értékeket akar kapni, ezért D-t 24-nek választja, így egyenletrendszere

$$\begin{aligned} y + z &= 36 \\ x + z &= 32 \\ x + y &= 30 \end{aligned}$$

alakú lesz,

Mivel x-re, y-ra és z-re egész értékeket akar kapni, ezért D-t 24-nek választja, így egyenletrendszere

$$\begin{aligned} y+z &= 36 \\ x+z &= 32 \\ x+y &= 30 \end{aligned}$$

alakú lesz, amiből $x = 13, \; y = 17, \; z = 19$.

Mivel x-re, y-ra és z-re egész értékeket akar kapni, ezért D-t 24-nek választja, így egyenletrendszere

$$y + z = 36$$
$$x + z = 32$$
$$x + y = 30$$

alakú lesz, amiből $x = 13, \; y = 17, \; z = 19$.

Megjegyzés. Általános jegyeket tartalmaz a szöveges megoldás. Határozatlan egyenletrendszer ilyetén megoldása szerepel Diophantos Arithmetica c. könyvében, pl. az I. 24 feladat megoldása.

Liber quadratorum

A mű első könyve — amely zömmel pitagoraszi számhármasokkal foglalkozik — a következő bejelentéssel kezdődik.

Az első n páratlan szám összege n^2.

Konkrét példákkal illusztrálja állítását, melynek bizonyítása a könyv végén van.

Az I. könyv fő problémája.

Keressünk olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám.

Az I. könyv fő problémája.

Keressünk olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám.

Az I. könyv fő problémája.

Keressünk olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám.

A feladat pontosabb megfogalmazása:

Az I. könyv fő problémája.

Keressünk olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám.

A feladat pontosabb megfogalmazása:

Keressünk két olyan négyzetszámot,
amelyek összege is négyzetszám.

Az I. könyv fő problémája.

Keressünk olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám.

A feladat pontosabb megfogalmazása:

Keressünk két olyan négyzetszámot,
amelyek összege is négyzetszám.

Azaz mai szóhasználattal, keressünk Pitagoraszi számhármasokat.

Az I. könyv fő problémája.

Keressünk olyan négyzetszámokat, amelyek összege négyzetszám.

A feladat pontosabb megfogalmazása:

Keressünk két olyan négyzetszámot,
amelyek összege is négyzetszám.

Azaz mai szóhasználattal, keressünk Pitagoraszi számhármasokat.
Nem ad meg eljárást, konkrét számokkal dolgozik, de ...

1. módszer: ha y^2 páratlan. Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk.

1. módszer: ha y^2 páratlan. Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk. Legyen $y^2 = 9 = 3^2$.

1. módszer: ha y^2 páratlan. Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk. Legyen $y^2 = 9 = 3^2$. Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$,

1. módszer: ha y^2 páratlan. Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk. Legyen $y^2 = 9 = 3^2$. Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$, tehát $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.

1. módszer: ha y^2 páratlan. Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk. Legyen $y^2 = 9 = 3^2$. Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$, tehát $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.
Mit rejt az 1. módszer.

1. módszer: ha y^2 páratlan. Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk. Legyen $y^2 = 9 = 3^2$. Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$, tehát $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.

Mit rejt az 1. módszer.

E módszer —a kirótt föltétel mellett— teljesen általános,

1. módszer: ha y^2 páratlan. Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk. Legyen $y^2 = 9 = 3^2$. Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$, tehát $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.

Mit rejt az 1. módszer.

E módszer —a kirótt föltétel mellett— teljesen általános, hiszen ha d páratlan négyzetszám, akkor

1. módszer: ha y^2 páratlan. Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk. Legyen $y^2 = 9 = 3^2$. Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$, tehát $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.

Mit rejt az 1. módszer.

E módszer —a kirótt föltétel mellett— teljesen általános, hiszen ha d páratlan négyzetszám, akkor

$$
\begin{aligned}
y^2 &= d \\
x^2 &= 1 + 3 + \cdots + (d - 2) = ((d - 1)/2)^2 \\
z^2 &= x^2 + y^2 = 1 + 3 + \cdots + (d - 2) + d = ((d + 1)/2)^2 .
\end{aligned}
$$

1. módszer: ha y^2 páratlan. Legyen y^2 páratlan négyzetszám, s keressünk hozzá olyan x^2 négyzetszámot, amelyet hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk. Legyen $y^2 = 9 = 3^2$. Adjuk össze a 9-nél kisebb páratlan számokat, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = x^2$, tehát $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.

Mit rejt az 1. módszer.

E módszer —a kirótt föltétel mellett— teljesen általános, hiszen ha d páratlan négyzetszám, akkor

$$\begin{aligned}
y^2 &= d \\
x^2 &= 1 + 3 + \cdots + (d-2) = ((d-1)/2)^2 \\
z^2 &= x^2 + y^2 = 1 + 3 + \cdots + (d-2) + d = ((d+1)/2)^2 .
\end{aligned}$$

Ezután bizonyítást (illusztrációt) is ad Euklidesz Elemek II. könyve stílusában geometriai eljárással: egy egyenesszakasz alkalmas fölosztásával.

2. módszer: ha y^2 osztható 4-gyel. Kiindulási észrevétele a következő fölbontás (amit szövegesen ad meg):
$y^2 = 4k = (2k-1) + (2k+1)$,

2. módszer: ha y^2 osztható 4-gyel. Kiindulási észrevétele a következő fölbontás (amit szövegesen ad meg):
$y^2 = 4k = (2k-1) + (2k+1)$, majd számolása a következő:

2. módszer: ha y^2 osztható 4-gyel. Kiindulási észrevétele a következő fölbontás (amit szövegesen ad meg):
$y^2 = 4k = (2k-1) + (2k+1)$, majd számolása a következő:

$$y^2 = 36 = 6^2 = 17 + 19,$$

$$x^2 = 1 + \cdots + 15 = 64 = 8^2,$$

$$z^2 = x^2 + y^2 = 1 + \cdots + 15 + 17 + 19 = 100 = 10^2.$$

Általánosan:

2. módszer: ha y^2 osztható 4-gyel. Kiindulási észrevétele a következő fölbontás (amit szövegesen ad meg):
$y^2 = 4k = (2k-1) + (2k+1)$, majd számolása a következő:

$$y^2 = 36 = 6^2 = 17 + 19,$$
$$x^2 = 1 + \cdots + 15 = 64 = 8^2,$$
$$z^2 = x^2 + y^2 = 1 + \cdots + 15 + 17 + 19 = 100 = 10^2.$$

Általánosan:

$$y^2 = 4k = 2(2k) = (2k-1) + (2k+1),$$
$$x^2 = 1 + \cdots + (2k-3) = (k-1)^2,$$
$$z^2 = 1 + \cdots + (2k-3) + ((2k-1) + (2k+1)) = (k+1)^2.$$

Hasonló eljárásokat mutat be
(a) 3-mal osztható páratlan és
(b) 6-tal osztható négyzetszámokra is:

Hasonló eljárásokat mutat be
(a) 3-mal osztható páratlan és
(b) 6-tal osztható négyzetszámokra is:

(a)

$$y^2 = 81 = 25 + 27 + 29 = 9^2,$$
$$x^2 = 1 + \cdots + 23 = 144 = 12^2,$$
$$z^2 = 1 + \cdots + 23 + (25 + 27 + 29) = 225 = 15^2.$$

Hasonló eljárásokat mutat be
(a) 3-mal osztható páratlan és
(b) 6-tal osztható négyzetszámokra is:

(a)

$$y^2 = 81 = 25 + 27 + 29 = 9^2,$$
$$x^2 = 1 + \cdots + 23 = 144 = 12^2,$$
$$z^2 = 1 + \cdots + 23 + (25 + 27 + 29) = 225 = 15^2.$$

(b)

$$y^2 = 144 = 6 \cdot 24 = (19 + 21) + (23 + 25) + (27 + 29) = 12^2$$
$$x^2 = 1 + 3 + \cdots + 17 = 81 = 9^2$$
$$z^2 = (1 + 3 + \cdots + 17) + (19 + 21 + \cdots + 29) = 225 = 15^2.$$

Flos

Palermoi János első problémája.

Adjunk meg olyan négyzetszámot, amelyhez ötöd adva, vagy belőle ötöt kivonva egyaránt négyzetszámot kapunk.

Palermoi János első problémája.

Adjunk meg olyan négyzetszámot, amelyhez ötöd adva, vagy belőle ötöt kivonva egyaránt négyzetszámot kapunk.

Palermoi János első problémája.

Adjunk meg olyan négyzetszámot, amelyhez ötöd adva, vagy belőle ötöt kivonva egyaránt négyzetszámot kapunk.

Mai jelölésekkel a következő egyenletrendszert kell megoldani.

Palermoi János első problémája.

Adjunk meg olyan négyzetszámot, amelyhez ötöd adva, vagy belőle ötöt kivonva egyaránt négyzetszámot kapunk.

Mai jelölésekkel a következő egyenletrendszert kell megoldani.

$$x^2 + 5 = y^2$$
$$x^2 - 5 = z^2$$

Palermoi János első problémája.

Adjunk meg olyan négyzetszámot, amelyhez ötöd adva, vagy belőle ötöt kivonva egyaránt négyzetszámot kapunk.

Mai jelölésekkel a következő egyenletrendszert kell megoldani.

$$x^2 + 5 = y^2$$
$$x^2 - 5 = z^2$$

Leonardo megoldása: $x = 3 + \frac{5}{12}$, $y = 4 + \frac{1}{12}$, $\quad z = 2 + \frac{7}{12}$.

Palermoi János első problémája.

Adjunk meg olyan négyzetszámot, amelyhez ötöd adva, vagy belőle ötöt kivonva egyaránt négyzetszámot kapunk.

Mai jelölésekkel a következő egyenletrendszert kell megoldani.

$$x^2 + 5 = y^2$$
$$x^2 - 5 = z^2$$

Leonardo megoldása: $x = 3 + \frac{5}{12}$, $y = 4 + \frac{1}{12}$, $\quad z = 2 + \frac{7}{12}$.
A Liber quadratorumban több fejezetet szentelt e probléma általánosításainak.

A következő egyenletrendszert vizsgálja

A következő egyenletrendszert vizsgálja

$$x^2 + C = y^2$$
$$x^2 - C = z^2$$

A következő egyenletrendszert vizsgálja

$$x^2 + C = y^2$$
$$x^2 - C = z^2$$

Speciális terminológiája: Ha x^2 és C megoldása e problémának, akkora C számot *congruum*-nak, míg az x^2 négyzetet *quadratus congruentus*-nak nevezi.

A következő egyenletrendszert vizsgálja

$$x^2 + C = y^2$$
$$x^2 - C = z^2$$

Speciális terminológiája: Ha x^2 és C megoldása e problémának, akkora C számot *congruum*-nak, míg az x^2 négyzetet *quadratus congruentus*-nak nevezi. A műben részletesen, nagy gonddal foglalkozik a congruus-congruentus párok keresésével.

Palermoi János második problémája.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

Leonardo először kizár bizonyos alakú megoldásokat:

Palermoi János második problémája.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

Leonardo először kizár bizonyos alakú megoldásokat:

Palermoi János második problémája.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

Leonardo először kizár bizonyos alakú megoldásokat: A megoldás nem lehet

1. természetes szám;

Palermoi János második problémája.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

Leonardo először kizár bizonyos alakú megoldásokat: A megoldás nem lehet

1. természetes szám;
2. racionális szám;

Palermoi János második problémája.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

Leonardo először kizár bizonyos alakú megoldásokat: A megoldás nem lehet

1. természetes szám;
2. racionális szám;
3. racionális szám négyzetgyöke sem;

Palermoi János második problémája.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet.

Leonardo először kizár bizonyos alakú megoldásokat: A megoldás nem lehet

1. természetes szám;
2. racionális szám;
3. racionális szám négyzetgyöke sem;
4. $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ alakú sem, ahol a és b pozitív racionális számok.

Ezek után meghatározza a megoldás közelítő értékét:

Ezek után meghatározza a megoldás közelítő értékét:

$$\begin{aligned} x &\approx 1;22,7,42,33,4,40 \\ &= \frac{1596577777}{1166400000} \\ &= 1,3688081078\textcolor{red}{5}32235939643347050 7\ldots \end{aligned}$$

Ezek után meghatározza a megoldás közelítő értékét:

$$\begin{aligned} x &\approx 1;22,7,42,33,4,40 \\ &= \frac{1596577777}{1166400000} \\ &= 1,36880810785322359396433470507\ldots \end{aligned}$$

A megoldás pontos értéke:

Ezek után meghatározza a megoldás közelítő értékét:

$$\begin{aligned} x &\approx 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40 \\ &= \frac{1596577777}{1166400000} \\ &= 1,3688081078{\color{red}5}32235939643347050 7\ldots \end{aligned}$$

A megoldás pontos értéke:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\left(352 + 6\sqrt{3930}\right)^{1/3} - \frac{26}{3}\left(352 + 6\sqrt{3930}\right)^{-1/3} - 2/3 \\ &= 1,3688081078{\color{red}2}137263522741433002\ldots \end{aligned}$$

Megjegyzések.

Megjegyzések.

1. Pontatlansága ellenére kijelenthetjük, hogy ez volt az első komoly kísérlet a harmadfokú egyenletek gyökjelekkel való, tehát algebrai megoldására.

Megjegyzések.

1. Pontatlansága ellenére kijelenthetjük, hogy ez volt az első komoly kísérlet a harmadfokú egyenletek gyökjelekkel való, tehát algebrai megoldására.
2. Más írásaiból azonban az tűnt ki, hogy osztotta az iszlám tudósok, így Omar Khajjam, azon véleményét, hogy a harmad- és magasabb fokú egyenletek csak geometriailag oldhatók meg egzakt módon.

Megjegyzések.

1. Pontatlansága ellenére kijelenthetjük, hogy ez volt az első komoly kísérlet a harmadfokú egyenletek gyökjelekkel való, tehát algebrai megoldására.
2. Más írásaiból azonban az tűnt ki, hogy osztotta az iszlám tudósok, így Omar Khajjam, azon véleményét, hogy a harmad- és magasabb fokú egyenletek csak geometriailag oldhatók meg egzakt módon.
3. Előbbi eljárásában implicite az is benne van, hogy Euklidész X. könyve nem írja le az összes algebrai irracionálist, hiszen egyenletének nincs megoldása az ott tárgyalt $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, illetve $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ alakú irracionálisok körében.

‘Maestro’-k

1202 **Liber abaci** (Leonardo Pisano)

1202 **Liber abaci** (Leonardo Pisano)

1228 Leonardo átdolgozza művét.

1202 **Liber abaci** (Leonardo Pisano)

1228 Leonardo átdolgozza művét.

***1344** **Aliabraa argibra** (a pisai Maestro Dardi)

1202 **Liber abaci** (Leonardo Pisano)

1228 Leonardo átdolgozza művét.

***1344** **Aliabraa argibra** (a pisai Maestro Dardi)

1463 **Trattato di praticha d'arismetrica** (a firenzei Maestro Benedetto)

1202 **Liber abaci** (Leonardo Pisano)

1228 Leonardo átdolgozza művét.

***1344** **Aliabraa argibra** (a pisai Maestro Dardi)

1463 **Trattato di praticha d'arismetrica** (a firenzei Maestro Benedetto)

1487 **Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalà** (Luca Pacioli)

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:
  - a 15. könyv elején Leonardo Pisano *Liber abaci*-jából átvett és olaszra fordított 82 problémát tárgyal,

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:
  - a 15. könyv elején Leonardo Pisano *Liber abaci*-jából átvett és olaszra fordított 82 problémát tárgyal,
  - a 16. könyv pedig Leonardo Pisano *Liber quadratorum*-jának olasz nyelvű fordítása.

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:
  - a 15. könyv elején Leonardo Pisano *Liber abaci*-jából átvett és olaszra fordított 82 problémát tárgyal,
  - a 16. könyv pedig Leonardo Pisano *Liber quadratorum*-jának olasz nyelvű fordítása.
- Néhány vizsgált egyenlettípus, jelölés:

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:
  - a 15. könyv elején Leonardo Pisano *Liber abaci*-jából átvett és olaszra fordított 82 problémát tárgyal,
  - a 16. könyv pedig Leonardo Pisano *Liber quadratorum*-jának olasz nyelvű fordítása.
- Néhány vizsgált egyenlettípus, jelölés:
  - $ax = b$, $x^2 = b$, $x^2 = ax$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$, $x^2 = ax + b$.

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:
  - a 15. könyv elején Leonardo Pisano *Liber abaci*-jából átvett és olaszra fordított 82 problémát tárgyal,
  - a 16. könyv pedig Leonardo Pisano *Liber quadratorum*-jának olasz nyelvű fordítása.
- Néhány vizsgált egyenlettípus, jelölés:
  - $ax = b$, $x^2 = b$, $x^2 = ax$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$, $x^2 = ax + b$.
  - $x^2 =$ censo (c), $x^3 =$ cubo (b), $x^2 =$ censo di censo (cc).

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:
  - a 15. könyv elején Leonardo Pisano *Liber abaci*-jából átvett és olaszra fordított 82 problémát tárgyal,
  - a 16. könyv pedig Leonardo Pisano *Liber quadratorum*-jának olasz nyelvű fordítása.
- Néhány vizsgált egyenlettípus, jelölés:
  - $ax = b$, $x^2 = b$, $x^2 = ax$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$, $x^2 = ax + b$.
  - $x^2 =$ censo (c), $x^3 =$ cubo (b), $x^2 =$ censo di censo (cc).
- Az egyenleteket szöveges formában írta.

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:
  - a 15. könyv elején Leonardo Pisano *Liber abaci*-jából átvett és olaszra fordított 82 problémát tárgyal,
  - a 16. könyv pedig Leonardo Pisano *Liber quadratorum*-jának olasz nyelvű fordítása.
- Néhány vizsgált egyenlettípus, jelölés:
  - $ax = b$, $x^2 = b$, $x^2 = ax$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$, $x^2 = ax + b$.
  - $x^2 =$ censo (c), $x^3 =$ cubo (b), $x^2 =$ censo di censo (cc).
- Az egyenleteket szöveges formában írta.

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:
  - a 15. könyv elején Leonardo Pisano *Liber abaci*-jából átvett és olaszra fordított 82 problémát tárgyal,
  - a 16. könyv pedig Leonardo Pisano *Liber quadratorum*-jának olasz nyelvű fordítása.
- Néhány vizsgált egyenlettípus, jelölés:
  - $ax = b$, $x^2 = b$, $x^2 = ax$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$, $x^2 = ax + b$.
  - $x^2 =$ censo (c), $x^3 =$ cubo (b), $x^2 =$ censo di censo (cc).
- Az egyenleteket szöveges formában írta.

- Census et decem radicis equantur 39, azaz $x^2 + 10x = 39$.

Maestro Benedetto: *Trattato di praticha d'arismetrica*

- A mű 16 könyvből áll (500 nagyméretű pergamenlapon).
- A 13–15. fejezetek foglalkoznak algebrával:
  - a 15. könyv elején Leonardo Pisano *Liber abaci*-jából átvett és olaszra fordított 82 problémát tárgyal,
  - a 16. könyv pedig Leonardo Pisano *Liber quadratorum*-jának olasz nyelvű fordítása.
- Néhány vizsgált egyenlettípus, jelölés:
  - $ax = b$, $x^2 = b$, $x^2 = ax$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$, $x^2 = ax + b$.
  - $x^2 =$ censo (c), $x^3 =$ cubo (b), $x^2 =$ censo di censo (cc).
- Az egyenleteket szöveges formában írta.

- Census et decem radicis equantur 39, azaz $x^2 + 10x = 39$.
- $RV40\tilde{m}R320$, azaz $\sqrt{40 - \sqrt{320}}$ (Luca Pacioli).

Maestro Dardi: *Aliabraa argibra*

Maestro Dardi: *Aliabraa argibra*

- Sokféle egyenletet tárgyal, köztük harmad- és negyedfokúakat.

Maestro Dardi: *Aliabraa argibra*

- Sokféle egyenletet tárgyal, köztük harmad- és negyedfokúakat.
- Megoldási eljárásait nem bizonyította.

Maestro Dardi: *Aliabraa argibra*

- Sokféle egyenletet tárgyal, köztük harmad- és negyedfokúakat.
- Megoldási eljárásait nem bizonyította.

Egy feladat a műből:

Trovami 2 numeri che tal parte sia lo primo del sicondo chome 2 di 3, e moltiplicato lo primo in sé medesimo, e quella moltiplicatione moltiplicata per lo sicondo e giuntovi su 8 1/2 faccia tanto quanto moltiplicato lo primo per lo sicondo, e quella moltiplicatione moltiplicata anchora per lo sicondo, e lla R di quella moltiplicatione moltiplicata per 6 2/3. Adomando quanto sarà ciascuno numero.

Maestro Dardi: *Aliabraa argibra*

- Sokféle egyenletet tárgyal, köztük harmad- és negyedfokúakat.
- Megoldási eljárásait nem bizonyította.

Egy feladat a műből:

Trovami 2 numeri che tal parte sia lo primo del sicondo chome 2 di 3, e moltiplicato lo primo in sé medesimo, e quella moltiplicatione moltiplicata per lo sicondo e giuntovi su 8 1/2 faccia tanto quanto moltiplicato lo primo per lo sicondo, e quella moltiplicatione moltiplicata anchora per lo sicondo, e lla R di quella moltiplicatione moltiplicata per 6 2/3. Adomando quanto sarà ciascuno numero.

Maestro Dardi: *Aliabraa argibra*

- Sokféle egyenletet tárgyal, köztük harmad- és negyedfokúakat.
- Megoldási eljárásait nem bizonyította.

Egy feladat a műből:

Trovami 2 numeri che tal parte sia lo primo del sicondo chome 2 di 3, e moltiplicato lo primo in sé medesimo, e quella moltiplicatione moltiplicata per lo sicondo e giuntovi su 8 1/2 faccia tanto quanto moltiplicato lo primo per lo sicondo, e quella moltiplicatione moltiplicata anchora per lo sicondo, e lla R di quella moltiplicatione moltiplicata per 6 2/3. Adomando quanto sarà ciascuno numero.

Azaz oldjuk meg a $12x^3 + 8\frac{1}{2} = \left(6\frac{2}{3}\right)\sqrt{18x^3}$ egyenletet.

DAA1821 (p. 97v)

Uno presta a uno altro lire 100, e in capo a 3 anni egli riceve lire 150 tra capitale e merito, a fare chapo d'anno. Adimando a quanto fu prestata la lira lo mese.

DAA1821 (p. 97v)

Uno presta a uno altro lire 100, e in capo a 3 anni egli riceve lire 150 tra capitale e merito, a fare chapo d'anno. Adimando a quanto fu prestata la lira lo mese.

In Ungerese:

Egy ember kölcsön ad a másiknak 100 Lirát, és 3 év múlva, kamatos kamatot számolva 150 Lirát kap vissza. Mennyi volt a havi kamat?

DAA1821 (p. 97v)

Uno presta a uno altro lire 100, e in capo a 3 anni egli riceve lire 150 tra capitale e merito, a fare chapo d'anno. Adimando a quanto fu prestata la lira lo mese.

In Ungerese:

Egy ember kölcsön ad a másiknak 100 Lirát, és 3 év múlva, kamatos kamatot számolva 150 Lirát kap vissza. Mennyi volt a havi kamat?

DAA1821 (p. 97v)

Uno presta a uno altro lire 100, e in capo a 3 anni egli riceve lire 150 tra capitale e merito, a fare chapo d'anno. Adimando a quanto fu prestata la lira lo mese.

In Ungerese:

Egy ember kölcsön ad a másiknak 100 Lirát, és 3 év múlva, kamatos kamatot számolva 150 Lirát kap vissza. Mennyi volt a havi kamat?

A feladat a

$$100 + 15x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{80}x^3 = 150$$

egyenletre vezet.

A $c'x + b'x^2 + a'x^3 = n'$ egyenlet megoldását Maestro Dardi azzal kezdte, hogy egyszerűsített a legmagasabb fokú tag együtthatójával:

$$cx + bx^2 + ax^3 = n.$$

Ezek után megoldásnak az

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + n} - \frac{c}{b}$$

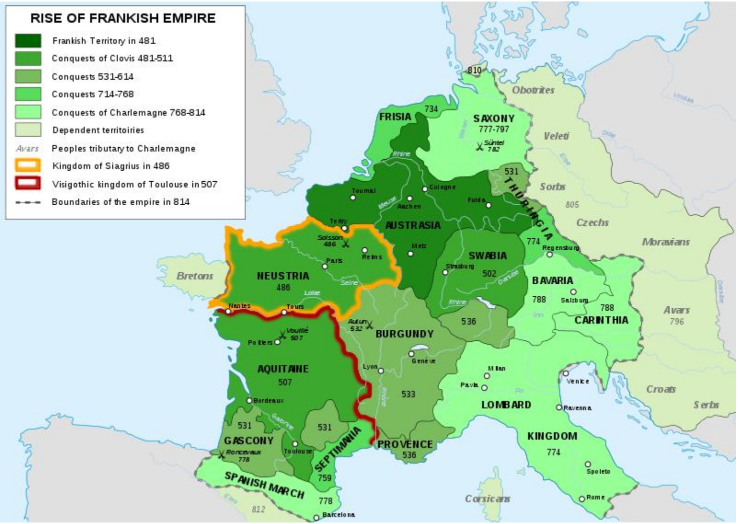
mennyiséget ajánlotta.

Képek

Attila (406–453)

Alphonse de Neuville:
Hunok a Chalon-i csatában (451)

Nursiai Sznet Benedek (480–547)



A Frank Birodalom (481–814)

Gerbert d'Aurillac (946–1003)
II. Szilveszter (999–1003)

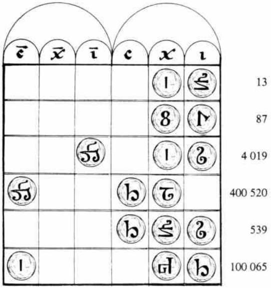
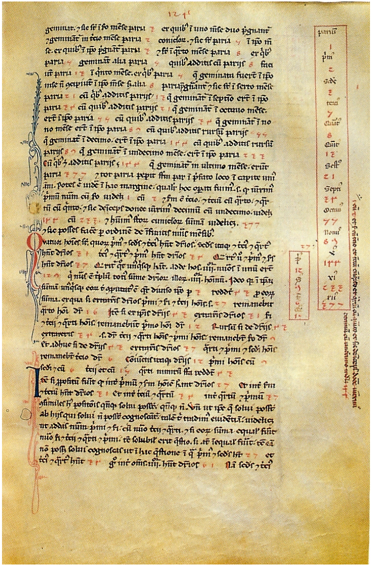


Fig. 241. – Le principe de représentation des nombres entiers au moyen des apices *sur l'abaque perfectionné de Gerbert et ses disciples (sur cet abaque, comportant 27 colonnes réunies de trois en trois, les* apices *prenaient une valeur de position variant selon la colonne où ils étaient disposés ; de plus, l'absence d'unités d'un certain rang y était signifiée en laissant vide la colonne correspondante).*

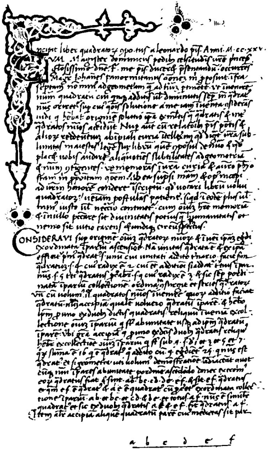
(Apices - Limoges avant 1030)

Gerbert abakusza

Leonardo Pisano (1170–1250)



Liber abaci (1202)



Beginning of *Liber quadratorum* by Leonardo Pisano. From "Il Libro dei Quadrati di Leonardo Pisano" in *Physis: Revista Internazionale di Storia della Scienza*, 1979, p. 197. Reprinted with permission of the author, Ettore Picutti.

Liber quadratorum

Luca Pacioli (1445–1514)


La quantita Magnanimo Duca:

Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita (Velence 1494)