Matematika az ókori Mezpotámiában

Dormán Miklós

SZTE TTIK, Bolyai Intézet

2010. október 15.

Matematikai szövegek Két korszakból származnak:

Matematikai szövegek Két korszakból származnak:

- Óbabiloni korszak (kb. 1800-1600)

Matematikai szövegek Két korszakból származnak:

- Óbabiloni korszak (kb. 1800-1600)
- Szeleukida-kor (kb. 300-0)

Matematikai szövegek Két korszakból származnak:

- Óbabiloni korszak (kb. 1800-1600)
- Szeleukida-kor (kb. 300-0)

Írásos emlékek

Matematikai szövegek Két korszakból származnak:

- Óbabiloni korszak (kb. 1800-1600)
- Szeleukida-kor (kb. 300-0)

Írásos emlékek

- Az első számottevő leletegyüttes: Assur-Ban-Apli ninivei könyvtára (1853).

Matematikai szövegek Két korszakból származnak:

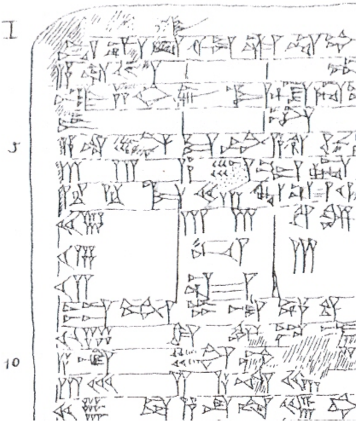
- Óbabiloni korszak (kb. 1800-1600)
- Szeleukida-kor (kb. 300-0)

Írásos emlékek

- Az első számottevő leletegyüttes: Assur-Ban-Apli ninivei könyvtára (1853).
- A behisztuni sziklán lévő háromnyelvű felirat (óperzsa, elámi és babilóni), amely lehetővé tette az ékírás megfejtését (1830-as évek).

1. Probléma (AO 8862, Szenkereh, Óbabilon)

Hosszúság és szélesség. A hosszúságot és a szélességet összeszoroztam, és így megkaptam a területet. Amennyivel pedig a hosszúság meghaladja a szélességet, azt hozzáadtam a területhez, és $3,3$ [-at kaptam]. Hosszúság és szélesség összeadva pedig 27. Mi a hosszúság, szélesség, terület?



AO 8862 (Louvre)

Az eredeti megoldás.

Az eljárásod ez legyen:

Az eredeti megoldás.

Az eljárásod ez legyen:

- 27-et, a hosszúságot és a szélesség összegét $3, 3$-hoz add hozzá; $3, 30$ [az eredmény].
  2-t a 27-hez add hozzá; 29 [az eredmény].

Az eredeti megoldás.

Az eljárásod ez legyen:

- 27-et, a hosszúságot és a szélesség összegét $3,3$-hoz add hozzá; $3,30$ [az eredmény].
  2-t a 27-hez add hozzá; 29 [az eredmény].
- 29-ból letöröd a felét; $14;30$-szor $14;30$ [az] $3,30;15$.
  Levonsz $3,30$-at $3,30;15$-ből; $0;15$ a különbség.
  $0;15$ négyzetgyöke $0;30$.

Az eredeti megoldás.

Az eljárásod ez legyen:

- 27-et, a hosszúságot és a szélesség összegét $3,3$-hoz add hozzá; $3,30$ [az eredmény].
  2-t a 27-hez add hozzá; 29 [az eredmény].
- 29-ból letöröd a felét; $14;30$-szor $14;30$ [az] $3,30;15$.
  Levonsz $3,30$-at $3,30;15$-ből; $0;15$ a különbség.
  $0;15$ négyzetgyöke $0;30$.
- Az első $14;30$-hoz add hozzá a $0;30$-at: a hosszúság 15.
  $0;30$-at a második $14;30$-ból kivonsz: a szélesség 14.

- Azt a 2-t, amit a 27-hez hozzáadtál, 14-ből, a szélességből levonod: 12 a végleges szélesség
  A 15 hosszúságot és a 12 szélességet összeszoroztam. 15-ször 12 [az] $3,0$ [ennyi a] terület.

- Azt a 2-t, amit a 27-hez hozzáadtál, 14-ből, a szélességből levonod: 12 a végleges szélesség
  A 15 hosszúságot és a 12 szélességet összeszoroztam. 15-ször 12 [az] $3,0$ [ennyi a] terület.
- A 15 hosszúság a 12 szélességen mennyivel nyúlik túl? 3[-mal] haladja meg
  3-at a $3,0$-hoz, a területhez adj hozzá: $3,3$,[-at kapsz].

Elemzés (I. rész).

Elemzés (I. rész).

- Mai jelölésekkel az

$$
\begin{aligned}
xy + x - y &= 183 \\
x + y &= 27
\end{aligned}
$$

egyenletrendszert kapjuk.

Elemzés (I. rész).

- Mai jelölésekkel az

$$xy + x - y = 183$$
$$x + y = 27$$

egyenletrendszert kapjuk.

- A számolás második lépéséből látszik, hogy a szerző a probléma egyszerűsítése céljából az y szélesség helyett egy új $y' = y + 2$ szélességet vezetett be.

Elemzés (I. rész).

- Mai jelölésekkel az

$$xy + x - y = 183$$
$$x + y = 27$$

  egyenletrendszert kapjuk.

- A számolás második lépéséből látszik, hogy a szerző a probléma egyszerűsítése céljából az y szélesség helyett egy új $y' = y + 2$ szélességet vezetett be.
- Ezzel a problémát valóban leegyszerűsíti:

$$xy' = 183 + 27 = 210$$
$$x + y' = 29.$$

Elemzés (II. rész) — Párhuzamos számolás.

$$27 + 3,3 = 3,30 \qquad xy' = 3,30$$

Elemzés (II. rész) — Párhuzamos számolás.

$$27 + 3,3 = 3,30 \qquad xy' = 3,30$$

$$2 + 27 = 29 \qquad x + y' = 29$$

Elemzés (II. rész) — Párhuzamos számolás.

$$27 + 3,3 = 3,30 \qquad xy' = 3,30$$

$$2 + 27 = 29 \qquad x + y' = 29$$

$$29 : 2 = 14;30 \qquad \frac{x + y'}{2} = 14;30$$

Elemzés (II. rész) — Párhuzamos számolás.

$$27 + 3,3 = 3,30 \qquad xy' = 3,30$$

$$2 + 27 = 29 \qquad x + y' = 29$$

$$29 : 2 = 14;30 \qquad \frac{x + y'}{2} = 14;30$$

$$14;30 \cdot 14;30 = 3,30;15 \qquad \left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 = 3,30;15$$

Elemzés (II. rész) — Párhuzamos számolás.

$$27 + 3,3 = 3,30 \qquad xy' = 3,30$$

$$2 + 27 = 29 \qquad x + y' = 29$$

$$29 : 2 = 14;30 \qquad \frac{x + y'}{2} = 14;30$$

$$14;30 \cdot 14;30 = 3,30;15 \qquad \left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 = 3,30;15$$

$$3,30;15 - 3,30 = 0;15 \qquad \left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy' = 0;15$$

Elemzés (II. rész) — Párhuzamos számolás.

$$\sqrt{0;15} = 0;30 \qquad \sqrt{\left(\frac{x+y'}{2}\right)^2 - xy'} = 0;30 = \frac{x-y'}{2}$$

Elemzés (II. rész) — Párhuzamos számolás.

$$\sqrt{0;15} = 0;30 \qquad \sqrt{\left(\frac{x+y'}{2}\right)^2 - xy'} = 0;30 = \frac{x-y'}{2}$$

$$14;30 + 0;30 = 15 \qquad \frac{x+y'}{2} + \frac{x-y'}{2} = 15 = x$$

Elemzés (II. rész) — Párhuzamos számolás.

$$\sqrt{0;15} = 0;30 \qquad \sqrt{\left(\frac{x+y'}{2}\right)^2 - xy'} = 0;30 = \frac{x-y'}{2}$$

$$14;30 + 0;30 = 15 \qquad \frac{x+y'}{2} + \frac{x-y'}{2} = 15 = x$$

$$14;30 - 0;30 = 15 \qquad \frac{x+y'}{2} - \frac{x-y'}{2} = 14 = y'$$

Elemzés (II. rész) — Párhuzamos számolás.

$$\sqrt{0;15} = 0;30 \qquad \sqrt{\left(\frac{x+y'}{2}\right)^2 - xy'} = 0;30 = \frac{x-y'}{2}$$

$$14;30 + 0;30 = 15 \qquad \frac{x+y'}{2} + \frac{x-y'}{2} = 15 = x$$

$$14;30 - 0;30 = 15 \qquad \frac{x+y'}{2} - \frac{x-y'}{2} = 14 = y'$$

$$14 - 2 = 12 \qquad y' - 2 = 12 = y$$

Összegzés.

Összegzés.

- Mai modern algebrai jelölésekkel a szöveges probléma az alábbi alakú:

$$\begin{aligned} xy &= P, \\ x + y &= a \end{aligned}$$

egyenletrendszerre vezet.

Összegzés.

- Mai modern algebrai jelölésekkel a szöveges probléma az alábbi alakú:

$$xy = P,$$
$$x + y = a$$

  egyenletrendszerre vezet.
- A $w = \sqrt{(a/2)^2 - P}$ jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy:

$$x = \frac{1}{2}a + w \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2}a - w.$$

Összegzés.

- Mai modern algebrai jelölésekkel a szöveges probléma az alábbi alakú:

$$\begin{aligned} xy &= P, \\ x + y &= a \end{aligned}$$

  egyenletrendszerre vezet.
- A $w = \sqrt{(a/2)^2 - P}$ jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy:

$$x = \frac{1}{2}a + w \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2}a - w.$$

- Mit kellett ehhez tudni?

Összegzés.

- Mai modern algebrai jelölésekkel a szöveges probléma az alábbi alakú:

$$xy = P,$$
$$x + y = a$$

egyenletrendszerre vezet.

- A $w = \sqrt{(a/2)^2 - P}$ jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy:

$$x = \frac{1}{2}a + w \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2}a - w.$$

- Mit kellett ehhez tudni?
  - az $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ azonosságokat,

Összegzés.

- Mai modern algebrai jelölésekkel a szöveges probléma az alábbi alakú:

$$xy = P,$$
$$x + y = a$$

egyenletrendszerre vezet.

- A $w = \sqrt{(a/2)^2 - P}$ jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy:

$$x = \frac{1}{2}a + w \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2}a - w.$$

- Mit kellett ehhez tudni?
  - az $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ azonosságokat,
  - négyzetgyököt vonni.

Más szövegekből kiderül, hogy az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosságot is ismerték.

BM 85194 (Óbabiloni ékírásos tábla 14. feladatának egy része)

Egy gát egyenlőszárú trapéz alakú keresztmetszetét kell meghatározni, ahol ismert az a alap, a $\beta = \frac{a-b}{2h}$ hajlás és az $S = \frac{a+b}{2}h$ terület.

Más szövegekből kiderül, hogy az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosságot is ismerték.

BM 85194 (Óbabiloni ékírásos tábla 14. feladatának egy része)

Egy gát egyenlőszárú trapéz alakú keresztmetszetét kell meghatározni, ahol ismert az a alap, a $\beta = \frac{a-b}{2h}$ hajlás és az $S = \frac{a+b}{2}h$ terület.

A 2β-t és $2S$-et összeszorozva kapjuk, hogy

$$4\beta S = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

így b^2 kifejezhető:

$$b^2 = a^2 - 4\beta S.$$

YBC 4697 (D2)

$$0;20 \cdot (x+y) - 0;1 \cdot (x-y)^2 = 15$$
$$xy = 10,0.$$

YBC 4697 (D2)

$$
\begin{aligned}
0;20 \cdot (x+y) - 0;1 \cdot (x-y)^2 &= 15 \\
xy &= 10,0.
\end{aligned}
$$

Hogyan oldanánk meg ezt a feladatot ma?

$$
\begin{aligned}
y &= 600/x, \\
&\vdots \\
-x^4 + 20x^3 + 300x^2 + 12000x - 360000 &= 0.
\end{aligned}
$$

Hogyan oldhatták meg a Óbabilonban?

Legyen

$$x = u + v,$$
$$y = u - v.$$

Hogyan oldhatták meg a Óbabilonban?

Legyen

$$x = u + v,$$
$$y = u - v.$$

Hogyan oldhatták meg a Óbabilonban?

Legyen

$$x = u + v,$$
$$y = u - v.$$

Az új ismeretlenekkel egyenletrendszerünk az alábbi alakú:

Hogyan oldhatták meg a Óbabilonban?

Legyen

$$x = u + v,$$
$$y = u - v.$$

Az új ismeretlenekkel egyenletrendszerünk az alábbi alakú:

$$0;4 \cdot u - 0;4 \cdot v^2 = 15$$
$$u^2 - v^2 = 10,0.$$

BM 13901 (14.)

Két négyzetem területét összeadtam, [az] 25, 25. A második négyzet [oldala] kétharmada az első négyzet[é]nek és még 5.

BM 13901 (14.)

Két négyzetem területét összeadtam, [az] $25,25$. A második négyzet [oldala] kétharmada az első négyzet[é]nek és még 5.

Jelölje x és y a négyzetek oldalait.

BM 13901 (14.)

Két négyzetem területét összeadtam, [az] $25,25$. A második négyzet [oldala] kétharmada az első négyzet[é]nek és még 5.

Jelölje x és y a négyzetek oldalait.

BM 13901 (14.)

Két négyzetem területét összeadtam, [az] 25, 25. A második négyzet [oldala] kétharmada az első négyzet[é]nek és még 5.

Jelölje x és y a négyzetek oldalait. Ekkor az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25,25, \\ y &= 0;40 \cdot x + 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani.

BM 13901 (14.)

Két négyzetem területét összeadtam, [az] 25, 25. A második négyzet [oldala] kétharmada az első négyzet[é]nek és még 5.

Jelölje x és y a négyzetek oldalait. Ekkor az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25,25, \\ y &= 0;40 \cdot x + 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. A második egyenletből y-t az elsőbe helyettesítve az

$$x^2 + (0;40 \cdot x + 5)^2 = 25,25 \tag{1}$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

Azonban, e módszer –a behelyettesítés– bevezetését al-Khwarizminek (kb. 780-850) tulajdonították.

A agyagtáblán található számítás a következő:

Azonban, e módszer –a behelyettesítés– bevezetését al-Khwarizminek (kb. 780-850) tulajdonították.

A agyagtáblán található számítás a következő:

Azonban, e módszer –a behelyettesítés– bevezetését al-Khwarizminek (kb. 780-850) tulajdonították.

A agyagtáblán található számítás a következő:

$$1 + 0;40 \cdot 0;40 = 1;26,40$$
$$5 \cdot 0;40 = 3;20$$
$$25,25 - 5 \cdot 5 = 25,0.$$

Azonban, e módszer –a behelyettesítés– bevezetését al-Khwarizminek (kb. 780-850) tulajdonították.

A agyagtáblán található számítás a következő:

$$1 + 0;40 \cdot 0;40 = 1;26,40$$
$$5 \cdot 0;40 = 3;20$$
$$25,25 - 5 \cdot 5 = 25,0.$$

Azaz éppen az (1) egyenlet együtthatóit számolták ki:

$$1;26,40 \cdot x^2 + 2 \cdot 3;20 \cdot x = 25,0.$$

Ezen egyenlet megoldásához tartozó számítások a következők:

Ezen egyenlet megoldásához tartozó számítások a következők:

Ezen egyenlet megoldásához tartozó számítások a következők:

$$1;26,40 \cdot 25,0 = 36,6;40$$
$$3;20 \cdot 3;20 = 11;6,40$$
$$36,6;40 - 11;6,40 = 36,17;46,40.$$

Ezen egyenlet megoldásához tartozó számítások a következők:

$$1;26,40 \cdot 25,0 = 36,6;40$$
$$3;20 \cdot 3;20 = 11;6,40$$
$$36,6;40 - 11;6,40 = 36,17;46,40.$$

Ezután megadták a $36,17;46,40$ négyzetgyökét, ami $46;40$, majd így folytatták:

Ezen egyenlet megoldásához tartozó számítások a következők:

$$1;26,40 \cdot 25,0 = 36,6;40$$
$$3;20 \cdot 3;20 = 11;6,40$$
$$36,6;40 - 11;6,40 = 36,17;46,40.$$

Ezután megadták a $36,17;46,40$ négyzetgyökét, ami $46;40$, majd így folytatták:

Ezen egyenlet megoldásához tartozó számítások a következők:

$$
\begin{aligned}
1;26,40 \cdot 25,0 &= 36,6;40 \\
3;20 \cdot 3;20 &= 11;6,40 \\
36,6;40 - 11;6,40 &= 36,17;46,40.
\end{aligned}
$$

Ezután megadták a $36,17;46,40$ négyzetgyökét, ami $46;40$, majd így folytatták:

- A gyöknek és annak, amit önmagával szoroztál különbsége $43;40$.

Ezen egyenlet megoldásához tartozó számítások a következők:

$$1;26,40 \cdot 25,0 = 36,6;40$$
$$3;20 \cdot 3;20 = 11;6,40$$
$$36,6;40 - 11;6,40 = 36,17;46,40.$$

Ezután megadták a $36,17;46,40$ négyzetgyökét, ami $46;40$, majd így folytatták:

- A gyöknek és annak, amit önmagával szoroztál különbsége $43;40$.
- Ha ezt megszorzod $1;26,40$ reciprokával, megkapod az egyik négyzetet [a négyzet oldalát], ami 30. A másik négyzet [oldala] pedig 25.

Összegzés.

Összegzés.

- A behelyettesítés után kapott

$$ax^2 + 2bx = c$$

egyenletet a-val megszorozták,

Összegzés.

- A behelyettesítés után kapott

$$ax^2 + 2bx = c$$

  egyenletet a-val megszorozták,
- majd az egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakították:

$$(ax + b)^2 = ac + b^2.$$

Összegzés.

- A behelyettesítés után kapott
$$ax^2 + 2bx = c$$
egyenletet a-val megszorozták,
- majd az egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakították:
$$(ax + b)^2 = ac + b^2.$$
- Így $x = \dfrac{\sqrt{ac + b^2} - b}{a}$.

Hogyan számolták ki (potitív) számok négyzetgyökét?

A Yale Egyetem babiloni gyűjteményének **YBC 7289**-es agyagtábláján szerepel a $\sqrt{2}$ alábbi közelítő értéke:

$$1;24,51,10 \quad \left(= \frac{30547}{21600} = 1.41421\overline{296}\right).$$

Mivel $\sqrt{2} = 1.414213562373095049\ldots$, ezért

$$|\sqrt{2} - 1;24,51,10| < 0,599 \cdot 10^{-6}.$$

Hogyan számolták ki (potitív) számok négyzetgyökét?

A Yale Egyetem babiloni gyűjteményének **YBC 7289**-es agyagtábláján szerepel a $\sqrt{2}$ alábbi közelítő értéke:

$$1;24,51,10 \quad (= \frac{30547}{21600} = 1.41421\overline{296}).$$

Mivel $\sqrt{2} = 1.414213562373095049\ldots$, ezért

$$|\sqrt{2} - 1;24,51,10| < 0,599 \cdot 10^{-6}.$$

Hogyan számolták ki (potitív) számok négyzetgyökét?

A Yale Egyetem babiloni gyűjteményének **YBC 7289**-es agyagtábláján szerepel a $\sqrt{2}$ alábbi közelítő értéke:

$$1;24,51,10 \quad \left(= \frac{30547}{21600} = 1.41421\overline{296}\right).$$

Mivel $\sqrt{2} = 1.414213562373095049\ldots$, ezért

$$|\sqrt{2} - 1;24,51,10| < 0,599 \cdot 10^{-6}.$$

Hogyan számolták ki (potitív) számok négyzetgyökét?

A Yale Egyetem babiloni gyűjteményének **YBC 7289**-es agyagtábláján szerepel a $\sqrt{2}$ alábbi közelítő értéke:

$$1;24,51,10 \quad (= \frac{30547}{21600} = 1.41421\overline{296}).$$

Mivel $\sqrt{2} = 1.414213562373095049\ldots$, ezért

$$|\sqrt{2} - 1;24,51,10| < 0,599 \cdot 10^{-6}.$$

YBC 7289
Yale Egyetem, Babiloni Gyűjtemény

Hogyan érték el ezt a meghökkentő pontosságot?

A $\sqrt{a}$ valós szám értékének kiszámítása iterációval:

Ekkor teljesülnek a következők tetszőleges n természetes számra:

Hogyan érték el ezt a meghökkentő pontosságot?

A $\sqrt{a}$ valós szám értékének kiszámítása iterációval:

1. Válasszunk egy $a_1 < \sqrt{a}$ közelítést és legyen $b_1 = a/a_1$.,
   $(a_1 = 1,\ b_1 = 2)$

Ekkor teljesülnek a következők tetszőleges n természetes számra:

Hogyan érték el ezt a meghökkentő pontosságot?

A $\sqrt{a}$ valós szám értékének kiszámítása iterációval:

1. Válasszunk egy $a_1 < \sqrt{a}$ közelítést és legyen $b_1 = a/a_1.$,
   $(a_1 = 1,\ b_1 = 2)$
2. Legyen $a_2 = (a_1 + b_1)/2$ és $b_2 = a/a_2$. $(a_2 = 3/2,\ b_2 = 4/3)$

Ekkor teljesülnek a következők tetszőleges n természetes számra:

Hogyan érték el ezt a meghökkentő pontosságot?

A $\sqrt{a}$ valós szám értékének kiszámítása iterációval:

1. Válasszunk egy $a_1 < \sqrt{a}$ közelítést és legyen $b_1 = a/a_1$.,
   $(a_1 = 1,\ b_1 = 2)$
2. Legyen $a_2 = (a_1 + b_1)/2$ és $b_2 = a/a_2$. $(a_2 = 3/2,\ b_2 = 4/3)$

   $\vdots$

Ekkor teljesülnek a következők tetszőleges n természetes számra:

Hogyan érték el ezt a meghökkentő pontosságot?

A $\sqrt{a}$ valós szám értékének kiszámítása iterációval:

1. Válasszunk egy $a_1 < \sqrt{a}$ közelítést és legyen $b_1 = a/a_1$.,
   $(a_1 = 1,\ b_1 = 2)$
2. Legyen $a_2 = (a_1 + b_1)/2$ és $b_2 = a/a_2$. $(a_2 = 3/2,\ b_2 = 4/3)$

   $\vdots$

Ekkor teljesülnek a következők tetszőleges n természetes számra:

- $\sqrt{a}$ az a_n és b_n számok közé esik,

Hogyan érték el ezt a meghökkentő pontosságot?

A $\sqrt{a}$ valós szám értékének kiszámítása iterációval:

1. Válasszunk egy $a_1 < \sqrt{a}$ közelítést és legyen $b_1 = a/a_1$.,
   $(a_1 = 1,\ b_1 = 2)$
2. Legyen $a_2 = (a_1 + b_1)/2$ és $b_2 = a/a_2$. $(a_2 = 3/2,\ b_2 = 4/3)$

   $\vdots$

Ekkor teljesülnek a következők tetszőleges n természetes számra:

- $\sqrt{a}$ az a_n és b_n számok közé esik,
- $|b_n - a_n| < |b_{n+1} - a_{n+1}|$

Az eljárást elegendően sokszor végrehajtva $\sqrt{a}$ értéke tetszőleges pntossággal kiszámítható.
Az algoritmust későbbi korok számos tudósának tulajdonították:

Az eljárást elegendően sokszor végrehajtva $\sqrt{a}$ értéke tetszőleges pntossággal kiszámítható.
Az algoritmust későbbi korok számos tudósának tulajdonították:

- **Archytas** (kb. 426-365, az utolsó nagy pitagoreus)

Az eljárást elegendően sokszor végrehajtva $\sqrt{a}$ értéke tetszőleges pntossággal kiszámítható.
Az algoritmust későbbi korok számos tudósának tulajdonították:

- **Archytas** (kb. 426-365, az utolsó nagy pitagoreus)
- (alexandriai) **Heron** (kb. 100)

Az eljárást elegendően sokszor végrehajtva $\sqrt{a}$ értéke tetszőleges pntossággal kiszámítható.
Az algoritmust későbbi korok számos tudósának tulajdonították:

- **Archytas** (kb. 426-365, az utolsó nagy pitagoreus)
- (alexandriai) **Heron** (kb. 100)
- **Isaac Newton** (1643-1727)

Összefoglalás.

Algebra és aritmetika

- Egyismeretlenes egyenletek:

Összefoglalás.

Algebra és aritmetika

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$ax = b,$$

Összefoglalás.

Algebra és aritmetika

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$ax = b,$$
$$x^2 = a,$$

Összefoglalás.

Algebra és aritmetika

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$\begin{aligned} ax &= b, \\ x^2 &= a, \\ x^2 \pm ax &= b, \end{aligned}$$

Összefoglalás.

Algebra és aritmetika

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$
\begin{aligned}
ax &= b, \\
x^2 &= a, \\
x^2 \pm ax &= b, \\
x^3 &= a,
\end{aligned}
$$

Összefoglalás.

Algebra és aritmetika

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$\begin{aligned} ax &= b, \\ x^2 &= a, \\ x^2 \pm ax &= b, \\ x^3 &= a, \\ x^2(x+1) &= a. \end{aligned}$$

Összefoglalás.

Algebra és aritmetika

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$ax = b,$$
$$x^2 = a,$$
$$x^2 \pm ax = b,$$
$$x^3 = a,$$
$$x^2(x+1) = a.$$

- Kétismeretlenes egyenletrendszerek:

Összefoglalás.

Algebra és aritmetika

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$
\begin{aligned}
ax &= b,\\
x^2 &= a,\\
x^2 \pm ax &= b,\\
x^3 &= a,\\
x^2(x+1) &= a.
\end{aligned}
$$

- Kétismeretlenes egyenletrendszerek:

$$x \pm y = a, \qquad xy = b,$$

Összefoglalás.

Algebra és aritmetika

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$\begin{aligned} ax &= b, \\ x^2 &= a, \\ x^2 \pm ax &= b, \\ x^3 &= a, \\ x^2(x+1) &= a. \end{aligned}$$

- Kétismeretlenes egyenletrendszerek:

$$\begin{aligned} x \pm y &= a, \qquad & xy &= b, \\ x \pm y &= a, \qquad & x^2 + y^2 &= b. \end{aligned}$$

Összefoglalás.

Ismerték az alábbi képleteket

- Egyismeretlenes egyenletek:

Összefoglalás.

Ismerték az alábbi képleteket

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

Összefoglalás.

Ismerték az alábbi képleteket

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

Összefoglalás.

Ismerték az alábbi képleteket

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

$$1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^n + 2^{n-1},$$

Összefoglalás.

Ismerték az alábbi képleteket

- Egyismeretlenes egyenletek:

$$\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, \\
(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2, \\
1 + 2 + \cdots + 2^n &= 2^n + 2^{n-1}, \\
1 + 2 + \cdots + n &= \frac{1}{2} n(n+1),
\end{aligned}$$

Összefoglalás.

Ismerték az alábbi képleteket

- Egyismeretlenes egyenletek:

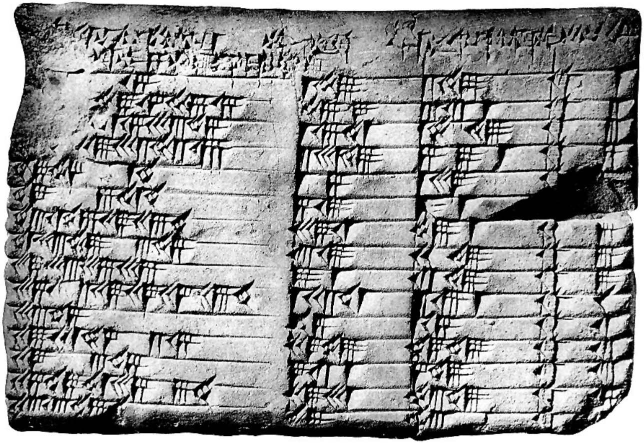
$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, \\
(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2, \\
1 + 2 + \cdots + 2^n &= 2^n + 2^{n-1}, \\
1 + 2 + \cdots + n &= \frac{1}{2} n(n+1), \\
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} n\right)(1 + 2 + \cdots + n).
\end{aligned}
$$

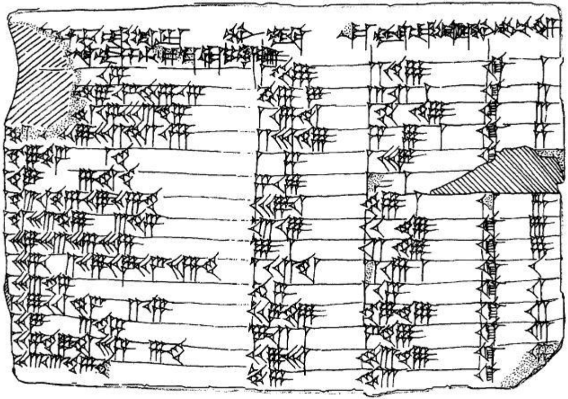
Az $x^2 + y^2 = z^2$ (diofantoszi) egyenletnek eleget tevő (pitagoraszi) számhármasokat az

$$x = p^2 - q^2,$$
$$y = 2pq,$$
$$z = p^2 + q^2$$

képletek segítségével találták meg.

Plimpton 322
Columbia Egyetem, New York (Plimpton-gyűjtemény)





I	II (=b)	III (=d)	IV
[1,59,0,]15	1,59	2,49	1
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1,]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

Geometria

Geometria

- arányosság párhuzamos szelésnél,

Geometria

- arányosság párhuzamos szelésnél,
- Pitagorasz-tétel,

Geometria

- arányosság párhuzamos szelésnél,
- Pitagorasz-tétel,
- háromszög és trapéz területe,

Geometria

- arányosság párhuzamos szelésnél,
- Pitagorasz-tétel,
- háromszög és trapéz területe,
- kör kerülete: $6r$, kör területe: $3r^2$,

Geometria

- arányosság párhuzamos szelésnél,
- Pitagorasz-tétel,
- háromszög és trapéz területe,
- kör kerülete: $6r$, kör területe: $3r^2$,
- hasáb és henger térfogata,

Geometria

- arányosság párhuzamos szelésnél,
- Pitagorasz-tétel,
- háromszög és trapéz területe,
- kör kerülete: $6r$, kör területe: $3r^2$,
- hasáb és henger térfogata,
- csonkakúp térfogata: $\frac{1}{2}(3R^2 + 3r^2)h$,

Geometria

- arányosság párhuzamos szelésnél,
- Pitagorasz-tétel,
- háromszög és trapéz területe,
- kör kerülete: $6r$, kör területe: $3r^2$,
- hasáb és henger térfogata,
- csonkakúp térfogata: $\frac{1}{2}(3R^2 + 3r^2)h$,
- négyzetes alap- és fedőlapú csonkagúla térfogata: $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)h$.