

HOMOMORFIZMUSOK

Legyenek $\mathbf{A} = (A; F)$ és $\mathbf{B} = (B; F)$ azonos típusú algebraik, $\varphi: A \rightarrow B$ leképezés. Azt mondjuk, hogy φ homomorfizmus az \mathbf{A} és \mathbf{B} algebraik között, ha tetszőleges $f \in F$ -re (az f művelet legyen n -változós) és tetszőleges $a_1, \dots, a_n \in A$ -ra

$$(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n))\varphi = f^{\mathbf{B}}(a_1\varphi, \dots, a_n\varphi)$$

teljesül. A következő elnevezések használatosak:

- beágyazás** : injektív homomorfizmus,
- izomorfizmus** : bijektív homomorfizmus,
- endomorfizmus** : $\varphi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ homomorfizmus,
- automorfizmus** : $\varphi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ izomorfizmus.

Ha az \mathbf{A} és \mathbf{B} algebraik grupoidok, pl. $F = \{*\}$ és $G = \{\star\}$, akkor φ pontosan akkor homomorfizmus, ha tetszőleges $a_1, a_2 \in A$ -ra

$$(a_1 * a_2)\varphi = (a_1\varphi) \star (a_2\varphi)$$

teljesül.

1. Feladat. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az alábbi $\varphi: A \rightarrow B$ leképezés az \mathbf{A} algebraikból a \mathbf{B} algebraikába?

- (a) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}; A_n)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; G_n)$ és $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto 3^x$, ahol

$$A_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

$$G_n: (\mathbb{R}^+)^n \rightarrow \mathbb{R}^+, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n};$$

- (b) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}; \oplus, \odot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$ és $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$, ahol

$$\oplus: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \oplus y = x + y + 1,$$

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \odot y = xy + x + y;$$

- (c) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+; \oplus, \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$ és $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, ahol

$$\oplus: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \oplus y = \frac{xy}{x + y};$$

- (d) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$ és $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{1}{x}$;

- (e) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; *)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ és $\varphi: \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \ln x$, ahol

$$*: (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, x * y = x^{\ln y};$$

- (f) $\mathbf{A} = (\mathbb{C}; +, \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}; +, \cdot)$ és $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $x + iy \mapsto x$.

2. Feladat. Legyen n tetszőleges természetes szám. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az $f: S_n \rightarrow S_n$ leképezés az $\mathbf{A} = (S_n; \cdot, {}^{-1}, \text{id})$ algebraikból a $\mathbf{B} = (S_n; \cdot, {}^{-1}, \text{id})$ algebraikába?

- (a) $f: S_n \rightarrow S_n, \pi \mapsto (12)\pi(12)$;
- (b) $f: S_n \rightarrow S_n, \pi \mapsto (123)\pi(123)$;
- (c) $f: S_n \rightarrow S_n, \pi \mapsto (123)\pi(132)$.

3. Feladat. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az

$$f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, x \mapsto x^2$$

leképezés az $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_n; +, \cdot)$ algebrából a $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_n; +, \cdot)$ algebrába ($n \in \{2, 3, 4\}$)?

4. Feladat. Legyen $A \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az $f: P(A) \rightarrow P(A), H \mapsto \bar{H}$ leképezés az $\mathbf{A} = (P(A); F)$ algebrából a $\mathbf{B} = (P(A); F)$ algebrába?

- (a) $F = \{\cap, \cup, f\}$;
- (b) $F = \{\Delta\}$.

5. Feladat. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az

$$f: P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N}), H \mapsto H \cup \{1, 2, 3\}$$

leképezés az $\mathbf{A} = (P(\mathbb{N}); F)$ algebrából a $\mathbf{B} = (P(\mathbb{N}); F)$ algebrába?

- (a) $F = \{\cap, \cup\}$;
- (b) $F = \{\cap, \cup, \neg\}$.

6. Feladat. Adjon meg injektív homomorfizmust a $(\mathbb{Z}_4; +)$ algebrából az $(S_7; \cdot)$, $(\mathbb{C}; \cdot)$, $(\mathbb{Z}_{12}; +)$, $(\mathbb{Z}_5; \cdot)$.

7. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az alábbi T grupoidtulajdonság algebrai tulajdonság, azaz ha T teljesül a $\mathbf{A} = (A; *)$ grupoidban és $(B; \otimes) \cong \mathbf{A}$, akkor T teljesül a $(B; \otimes)$ grupoidban is. Ennek segítségével mutassa meg, hogy az \mathbf{A} és \mathbf{B} algebrák nem izomorfak.

- (a) T : az $x * x = a$ egyenlet minden $a \in A$ -ra megoldható,
 $\mathbf{A} = (\mathbb{Q}; +)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{Q}^+; \cdot)$;
- (b) T : az $x * x = a$ egyenlet minden $a \in A$ -ra legfeljebb egy megoldása van,
 $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+; \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$;
- (c) T : az $a * a = a$ teljesül minden $a \in A$ -ra,
 $\mathbf{A} = (P(\mathbb{Z}); \cup)$, $\mathbf{B} = (P(\mathbb{Z}); \Delta)$;
- (d) T : \mathbf{A} -nak van véges generátorrendszere,
 $\mathbf{A} = (\mathbb{Q}; +)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}; +)$.

8. Feladat. Mutassa meg, hogy a $\varphi: A \rightarrow A'$ leképezés homomorfizmus az $\mathbf{A} = (A; F)$ és $\mathbf{A}' = (A'; F')$ algebrák között. Határozza meg a φ homomorfizmus magját és értékkészletét.

- (a) $A = A' = P(X)$, $F = F' = \{\cup, \cap\}$ és $\varphi: P(X) \rightarrow P(X), Y \mapsto Y \cap Z$, ahol X tetszőleges nem üres halmaz és $Z \subseteq X$;
- (b) $A = \mathbb{C}$, $A' = \mathbb{R}$, $F = F' = \{\cdot\}$ és $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto |z|$;
- (c) $A = S_n$, $A' = \mathbb{R}$, $F = \{\cdot\}$, $F' = \{\cdot\}$ és $\varphi: S_n \rightarrow \mathbb{R}, \pi \mapsto \text{sgn}(\pi)$, ahol $n \in \mathbb{N}$;
- (d) $A = \mathbb{R}[x]$, $A' = \mathbb{R}$, $F = F' = \{+, \cdot\}$ és $\varphi: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto p(1)$;
- (e) $A = \mathbb{R}[x]$, $A' = \mathbb{R}[x]$, $F = F' = \{+\}$ és $\varphi: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], p \mapsto p'$;
- (f) $A = \mathbb{C}$, $A' = \mathbb{R}$, $F = F' = \{+\}$ és $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, x + iy \mapsto x$;
- (g) $A = \mathbb{Z}$, $A' = S_5$, $F = \{+\}$, $F' = \{\cdot\}$ és $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow S_5, k \mapsto (12345)^k$;
- (h) $A = \mathbb{Z}$, $A' = \mathbb{C}$, $F = \{+\}$, $F' = \{\cdot\}$ és $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, k \mapsto \omega^k$, ahol $\omega = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$;

- (i) $A = \mathbb{Z}[x]$, $A' = \mathbb{Z}_5[x]$, $F = F' = \{+, \cdot\}$ és $\varphi: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_5[x]$, $p \mapsto \bar{p}$, ahol $\bar{p} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} x^k$, ha $p = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

9. Feladat. Döntse el, hogy az \mathbf{A} algebra izomorf-e az \mathbf{A}' algebraival.

- (a) $\mathbf{A} = (\mathbb{C}; +)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{R}; +) \times (\mathbb{R}; +)$;
 (b) $\mathbf{A} = (\mathbb{C}; \cdot)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{R}; \cdot) \times (\mathbb{R}; \cdot)$;
 (c) $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_6; +)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2; +) \times (\mathbb{Z}_3; +)$;
 (d) $\mathbf{A} = (S_6; +)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2; +) \times (\mathbb{Z}_3; +)$;
 (e) $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_4; +)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2; +) \times (\mathbb{Z}_2; +)$;
 (f) $\mathbf{A} = (\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}; \cdot)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2; +) \times (\mathbb{Z}_2; +)$;
 (g) $\mathbf{A} = (P(\{1, 2, 3\}); \Delta, \cap)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2; +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_2; +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_2; +, \cdot)$.

MONOUNÉR ALGEBRÁK KONGRUENCIÁI

Legyen $\mathbf{A} = (A; F)$ tetszőleges algebra. Ekkor a $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ osztályozás **kompatibilis osztályozása** az \mathbf{A} algebraának, ha tetszőleges $f \in F$ művelet (az f művelet mondjuk n -változós, $n \in \mathbb{N}$) esetén, ha $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in \varrho(\mathcal{C})$ esetén $(f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)) \in \varrho(\mathcal{C})$, ahol $\varrho(\mathcal{C})$ azaz ekvivalenciareláció, amelyhez tartozó osztályozás \mathcal{C} .

10. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az $\mathbf{A} = (A; f)$ algebraának?

- (a) $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$;
 (b) $\mathcal{C} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$.

11. Feladat. Mutassa meg, hogy $\alpha \in \text{Con}(\mathbf{A})$ és adjon meg izomorfizmust az \mathbf{A}/α és \mathbf{B} algebraik között.

- (a) $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3, 4\}; f)$, ahol $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $\alpha = \{1, 2\}^2 \cup \{3, 4\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{a, b\}; \tau)$, ahol $\tau = (ab)$;
 (b) $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; f)$, ahol f a 10. Feladatban definiált unér művelet, $\alpha = \{1, 4\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{5\}^2 \cup \{6\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{1, 2, 3, 4, 5\}; \pi)$, ahol $\pi = (123)(45)$.

12. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (A; f)$ algebra kongruenciáit. Rajzoljuk fel a $\text{Con}(\mathbf{A})$ kongruenciahálót.

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;
 (b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;
 (c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
 (d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

GRUPOIDOK KONGRUENCIÁI

13. Feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(P(\mathbb{Z}))$ az $\mathbf{A} = (P(\mathbb{Z}); \cup)$ algebraának?

- (a) $\mathcal{C} = \{\{X \subseteq \mathbb{Z} : X \text{ véges}\}, \{X \subseteq \mathbb{Z} : X \text{ végtelen}\}\};$
 (b) $\mathcal{C} = \{\{X \subseteq \mathbb{Z} : \mathbb{N} \subseteq X\}, \{X \subseteq \mathbb{Z} : \mathbb{N} \not\subseteq X\}\}.$

14. Feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(\mathbb{Z}_6)$ az $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_6; +)$ algebrának?

- (a) $\mathcal{C} = \{\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}, \{\bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}\};$
 (b) $\mathcal{C} = \{\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}\}.$

15. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $m: A^3 \rightarrow A, m(a, b, c) = \min(\max(a, b), \max(b, c), \max(c, a)).$ Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az $\mathbf{A} = (A; f)$ algebrának?

- (a) $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}\};$
 (b) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}.$

16. Feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és

*	a	b	c	d
a	a	b	c	c
b	a	b	c	c
c	d	d	b	b
d	c	d	b	a

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az $\mathbf{A} = (A; *)$ algebrának?

- (a) $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\};$
 (b) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}.$

17. Feladat. Mutassa meg, hogy $\alpha \in \text{Con}(\mathbf{A})$ és adjon meg izomorfizmust az \mathbf{A}/α és \mathbf{B} algebrák között.

- (a) $\mathbf{A} = (P(\mathbb{Z}); \cup), \alpha = \{\emptyset\}^2 \cup (P(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\})^2$ és $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_2; \cdot);$
 (b) $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_6; +), \alpha = \{\bar{0}, \bar{3}\}^2 \cup \{\bar{1}, \bar{4}\}^2 \cup \{\bar{2}, \bar{5}\}^2$ és $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_3; +);$
 (c) $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; m),$ ahol m a 2. Feladatban definiált 3-változós művelet, $\alpha = \{1, 2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{4, 5, 6\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{1, 2, 3\}; m|_{\{1, 2, 3\}});$
 (d) $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d, e\}; *),$ ahol

*	a	b	c	d	e
a	a	a	c	d	d
b	b	b	c	e	d
c	c	c	c	e	e
d	d	d	e	e	d
e	d	d	d	d	e

$$\alpha = \{a, b\}^2 \cup \{c\}^2 \cup \{d, e\}^2 \text{ és } \mathbf{B} = (\{0, 1, 2\}; \max).$$

18. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoid kongruenciáinak $\text{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	c	d	b
d	d	d	b	c

Rajzolja fel a $\text{Con}(\mathbf{A}) = (\text{Con}(\mathbf{A}); \wedge, \vee)$ háló Hasse-diagramját. Írja le az \mathbf{A}/ϑ faktorgrupoidokat tetszőleges $\vartheta \in \text{Con}(\mathbf{A})$ -ra.

19. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoid kongruenciáinak $\text{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

$*$	a	b	c	d
a	b	b	b	b
b	a	b	b	b
c	a	b	c	d
d	a	b	d	c

Rajzolja fel a $\text{Con}(\mathbf{A}) = (\text{Con}(\mathbf{A}); \wedge, \vee)$ háló Hasse-diagramját. Írja le az \mathbf{A}/ϑ faktorgrupoidokat tetszőleges $\vartheta \in \text{Con}(\mathbf{A})$ -ra.

20. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoid kongruenciáinak $\text{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	d	d
b	b	b	d	d
c	d	d	c	d
d	d	d	d	d

Rajzolja fel a $\text{Con}(\mathbf{A}) = (\text{Con}(\mathbf{A}); \wedge, \vee)$ háló Hasse-diagramját. Írja le az \mathbf{A}/ϑ faktorgrupoidokat tetszőleges $\vartheta \in \text{Con}(\mathbf{A})$ -ra.

21. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi algebraik egyszerűek, azaz csak triviális kongruenciáik vannak.

(a) $(\mathbb{Z}_7; +)$;

(b) $(A; f)$, ahol $A \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és $f: A^3 \rightarrow A$, $f(a, b, c) = \begin{cases} a, & \text{ha } a = b, \\ c & \text{különben;} \end{cases}$

(c) $(\mathbb{R}; +, \cdot)$;

(d) $(\{a, b, c, d\}; *)$, ahol a $*$ kétváltozós művelet művelet táblázata a következő (a kipontozott helyek tetszőlegesen kitölthetők):

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	a	\cdot	\cdot	\cdot
c	b	\cdot	\cdot	\cdot
d	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot

22. Feladat. Legyen $\mathbf{A} = (A; f)$ monounér algebra, valamint legyen B az \mathbf{A} algebra valamely részalgebrájának alphalmaz. Legyen $\vartheta_B \subseteq A \times A$ az alábbi reláció:

$$\vartheta_B = \{(a, b) : a = b \text{ vagy } \{a, b\} \subseteq B\}.$$

Igazolja, hogy ϑ_B kongruenciája \mathbf{A} -nak.

23. Feladat. Legyen $\mathbf{S} = (S; \cdot)$ félháló, azaz a \cdot kétváltozós művelet legyen kommutatív, asszociatív és idempotens (azaz tetszőleges $a, b, c \in S$ -re $a \cdot b = b \cdot a$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ és $a \cdot a = a$ teljesüljön). Legyen \leq az alábbi reláció az S halmazon:

$$a \leq b \iff a \cdot b = a \quad (a, b \in S).$$

Mutassa meg, hogy $\leq \subseteq S \times S$ részbenrendezés. Adott $a \in S$ -re legyen

$$\vartheta_a = \{(b, c) : a \leq b, c \text{ vagy } a \not\leq b, c\} \subseteq S \times S.$$

Mutassa meg, hogy ϑ_a az \mathbf{S} algebra kongruenciája.

24. Feladat. Legyen $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ tetszőleges háló, $a, b \in L$. Bizonyítsa be, hogy $\Theta(a, b) = \Theta(a \wedge b, a \vee b)$.

25. Feladat. Legyen $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ disztributív háló, valamint $a, b, c, d \in L$ olyan elemek, hogy $a \leq b$. Bizonyítsa be, hogy $(c, d) \in \Theta(a, b)$ pontosan akkor teljesül, ha $a \wedge c = a \wedge d$ és $b \vee c = b \vee d$.
