

RÉSZALGEBRÁK

1. Feladat. Legyen $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Lehet-e az $\mathbf{A} = (P(X); F)$ algebrában a H halmaz valamely részalgebra alaphalmaza?

- (a) $F = \{\Delta, \neg\}$, $H = \{Y \subseteq X : Y \text{ elemszáma páros}\}$;
 (b) $F = \{\cup, \neg\}$, $H = \{Y \subseteq X : Y \text{ elemszáma páros}\}$.

2. Feladat. Lehet-e az $\mathbf{A} = (R[x]; F)$ algebrában a H halmaz valamely részalgebra alaphalmaza?

- (a) $F = \{+, \cdot\}$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(2009) = 0\}$;
 (b) $F = \{\cdot\}$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(2009) \neq 0\}$;
 (c) $F = \{+, \cdot\}$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(2009) \neq 0\}$.

3. Feladat. Határozza meg az $X \subseteq A$ halmaz által generált részalgebrát az $\mathbf{A}_1 = (A; F_1)$, $\mathbf{A}_2 = (A; F_2)$ és $\mathbf{A}_3 = (A; F_3)$ algebrákban.

- (a) $A = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$, $X = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ prímszám}\}$, $F_1 = \{\cdot\}$, $F_2 = \{\cdot, ^{-1}\}$, $F_3 = \{+\}$;
 (b) $A = \mathbb{C}$, $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $F_1 = \{\cdot\}$, $F_2 = \{+\}$, $F_3 = \{+, \cdot\}$;
 (c) $A = \mathbb{R}$, $X = \{0, 1\}$,

$F_1 = \{A_2\}$, $F_2 = \{A_2, A_3\}$, $F_3 = \{A_k : k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$, ahol tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ -re A_k az alábbi k -változós művelet:

$$A_k: A^k \rightarrow A, A_k(a_1, \dots, a_k) = \frac{a_1 + \dots + a_k}{k};$$

- (d) $A = \mathbb{R}[x]$, $X = \{3, x^2\}$, $F_1 = \{+, -\}$, $F_2 = \{\cdot\}$, $F_3 = \{+, -, \cdot\}$;
 (e) $A = P(\mathbb{N})$, $X = \{H \in A : H \text{ elemszáma kettő}\}$, $F_1 = \{\cup\}$, $F_2 = \{\cap\}$, $F_3 = \{\cup, \cap\}$.

4. Feladat. Határozza meg a $(\mathbb{Z}; +, -)$ algebra minimális generátorrendszeit.

5. Feladat. Legyen $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + 1$ és $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto -x$. Mutassa meg, hogy a $(\mathbb{Z}; f, g)$ algebrának nincs valódi részalgebrája.

6. Feladat. Határozza meg az $(\mathbb{N}; +)$, $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Z}_6; +)$, $(\{a, b, c, d\}; \otimes)$ és $(\{a, b, c, d\}; \odot)$ algebrák összes egy-, illetve kételemű generátorrendszerét, ahol

\otimes	a	b	c	d
a	b	c	c	c
b	b	b	b	b
c	c	b	c	c
d	d	c	b	d

és

\odot	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	b	a	d	b
c	a	c	d	c
d	c	b	c	c