Hálók

Azt modjuk, hogy **az L háló ábrázolható halmazokkal**, ha van olyan X halmaz és $H \subseteq P(X)$, hogy $(H; \cap, \cup)$ háló, amely izomorf $\mathbf{L}$-lel.[1]

---

1. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{L}$ háló ábrázolható halmazokkal, akkor bármely $a, b, c \in L$-re teljesül, hogy $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

2. Mutassuk meg, hogy bármely háló tetszőleges a, b, c elemére teljesülnek az

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c,$$
$$(a \wedge b) \vee c \leqslant (a \vee c) \wedge (b \vee c),$$
$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leqslant ((a \wedge c) \vee b) \wedge c$$

egyenlőtlenségek.

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{L}$ hálóra az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) bármely $a, b, c \in L$-re, ha $a \leqslant c$, akkor $(a \vee b) \wedge c \leqslant a \vee (b \wedge c)$,

(ii) bármely $a, b, c \in L$-re, ha $c \leqslant a$, akkor $a \wedge (b \vee c) \leqslant (a \wedge b) \vee c$,

(iii) bármely $a, b, c \in L$-re $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c$.

Mutassunk olyan legalább ötelemű $\mathbf{L}_1$, illetve $\mathbf{L}_2$ hálót, amelyben teljesülnek, illetve nem teljesülnek a fentiek.

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{L}$ hálóra az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) bármely $a, b, c \in L$-re $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

(ii) bármely $a, b, c \in L$-re $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$.

Mutassunk olyan legalább ötelemű $\mathbf{L}_1$, illetve $\mathbf{L}_2$ hálót, amelyben teljesülnek, illetve nem teljesülnek a fentiek.

Legyen $\mathbf{L}$ tetszőleges korlátos háló, $a, b \in L$. Azt mondjuk, hogy a b elem **komplementuma** a-nak, ha $a \wedge b = 0$ és $a \vee b = 1$.

---

5. Mutassunk olyan legalább ötelemű véges hálót, amelyben

(a) egyik elemnek sincs komplementuma,

(b) van olyan elem, amelynek van és van olyan elem, amelynek nincs komplemenetuma,

(c) minden elemnek van komplementuma.

[1] Azaz van olyan $\varphi\colon L \to H$ bijektív leképezés, amelyre

$$(a \wedge b)\varphi = a\varphi \cap b\varphi$$
$$(a \vee b)\varphi = a\varphi \cup b\varphi$$

teljesül tetszőleges $a, b \in L$-re.

Amikor van komplementum, akkor egyértelmű-e az?

6. Legyen X tetszőleges halmaz, $A, B \subseteq X$. Igaz-e, hogy ha $A \cap B = \emptyset$ és $A \cup B = X$, akkor $B = X \setminus A$?

7. Tekintsük az A/α ekvivalenciarelációt az A halmazon, amelyet a hozzájuk tartozó osztályozással adtunk meg:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A/\alpha = 1|23|4$,

(b) $A = \{a, c, e, k, m\}$, $A/\alpha = aem|ck$,

(c) $A = \{a, c, e, k, m\}$, $A/\alpha = ae|km|c$,

(d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A/\alpha = 123|45|67|8$.

Van-e α-nak komplementuma $\mathrm{Eq}(A)$-ban? Egyértelmű-e a komplementum, ha létezik?

Részalgebrák

8. Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és $\mathbf{A} = (A; *)$, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

(a)
$$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & c \\ b & a & b & c & c \\ c & d & d & b & b \\ d & c & d & b & a \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & b & c & c & c \\ b & b & b & b & b \\ c & c & b & c & c \\ d & d & c & b & d \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & b & a & c & d \\ b & b & a & d & b \\ c & a & c & d & c \\ d & c & b & c & c \end{array}$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ algebra részalgebráinak $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ halmazát, majd rajzoljuk fel a $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A}); \subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.

Az $\mathbf{A}$ algebra **monounér**, ha egyetlen egyváltozós alapművelete van. Ha $A = \{1, 2, \dots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$
jelöli az $A \to A,\ k \mapsto a_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ unér műveletet.

---

9. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = (A; f)$ monounér algebra részalgebráinak $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ halmazát.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

(f) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Rajzoljuk fel a $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A}); \subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.