Ekvivalenciarelációk

1. Legyenek A és B tetszőleges halmazok, valamint $f\colon A \to B$ tetszőleges leképezés. Mutassuk meg, hogy a

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{(a,b) \in A \times A : \varphi(a) = \varphi(b)\} \subseteq A \times A$$

reláció ekvivalenciareláció.

2. Mutassuk meg, hogy a $\varphi\colon A \to B$ leképezés pontosan akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = 0_A$.

Legyen $\varphi \subseteq A \times B$ tetszőleges reláció. Az φ reláció **inverzének** nevezzük, és φ^{-1}-gyel jelöljük, a

$$\{(b,a) : (a,b) \in \alpha\} \subseteq B \times A$$

relációt.

---

3. Legyen φ tetszőleges A-ból B-be menő leképezés. Mutassuk meg a következőket:

(a) $\varphi^{-1} \subseteq B \times A$ pontosan akkor leképezés, ha φ bijektív;

(b) $A^2 \supseteq \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$;

(c) $B^2 \supseteq \varphi^{-1} \circ \varphi = \{(b,b) : b \in \mathrm{Im}(\varphi)\}$.

4. Bizonyítsuk be, hogy az $\alpha \subseteq A \times A$ reláció pontosan akkor ekvivalenciareláció, ha $0_A \subseteq \alpha$, $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ és $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.

Tetszőleges A halmaz esetén $\mathrm{Eq}(A)$-val jelöljük az A halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk halmazát.

---

5. Legyenek A halmaz és $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$. Igazoljuk, hogy $\alpha \cup \beta$ reflexív és szimmetrikus, de nem feltétlenül tranzitív.

Legyen γ tetszőleges reláció az A halmazon. A γ reláció **tranzitív lezártjának** nevezzük a

$$\gamma^* = \gamma \cup \{(a,b) : (\exists n \in \mathbb{N})(\exists z_1, \ldots, z_n \in A)\ a\gamma z_1 \gamma z_2 \ldots z_{n-1} \gamma z_n \gamma b\}$$

relációt.[1] Ha $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$, akkor az $(\alpha \cup \beta)^*$ relációt $\alpha \vee \beta$-val jelöljük.

---

6. Legyenek A halmaz és $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha \vee \beta \in \mathrm{Eq}(A)$, valamint $\alpha \vee \beta = \alpha \cup \alpha \circ \beta \cup \alpha \circ \beta \circ \alpha \cup \cdots$.

Legyen α ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor A/α-val jelöljük az α-hoz tartozó ekvivalencia-osztályok halmazát, azaz

$$A/\alpha = \{a\alpha^\bullet : a \in A\},$$

[1] Tegyük fel, hogy Γ a γ relációt tartalmazó tranzitív reláció A-n. Ha $(a,b) \in \gamma^*$, akkor vagy $(a,b) \in \gamma \subseteq \Gamma$ vagy van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $z_1, \ldots, z_n$, amelyekre $a\gamma z_1 \gamma z_2 \ldots z_{n-1} \gamma z_n \gamma b$ teljesül, ekkor $a\Gamma z_1 \Gamma z_2 \ldots z_{n-1} \Gamma z_n \Gamma b$, és így Γ tranzitivitása miatt $(a,b) \in \Gamma$. Azaz $\gamma^* \subseteq \Gamma$. Másrészt, ha $(a,b), (b,c) \in \gamma^*$, akkor vannak olyan k és l természetes számok, hogy $(a,b) \in \gamma^k$ és $(b,c) \in \gamma^l$. Így $(a,c) \in \gamma^{k+l} \subseteq \gamma^*$. Azaz γ^* tranzitív. Ez pedig azt jelenti, hogy γ^* a legszűkebb γ-t tartalamazó tranzitív reláció.

ahol $a\alpha^\bullet = \{b \in A : a\alpha b\}$ — az a elemet tartalmazó ekvivalenciaosztály. Az A/α halmaz az A halmaz α szerinti **faktorhalmaza**.

---

7. Tekintsük az $A = \{\text{alma}, \text{eper}, \text{málna}, \text{körte}, \text{citrom}\}$ halmazon az $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációkat:

$$x\,\alpha\,y \iff x \text{ és } y \text{ ugyanannyi betűből áll;}$$
$$x\,\beta\,y \iff x \text{ és } y \text{ színe megegyezik.}$$

Határozzuk meg az $A/(\alpha \cap \beta)$ és $A/(\alpha \vee \beta)$ faktorhalmazokat.

8. Tekintsük az alábbi $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezéseket:

$$\varphi(x) = \lfloor x \rfloor\,;$$
$$\psi(x) = \operatorname{sgn}(x).$$

Határozzuk meg az $\mathbb{R}/(\operatorname{Ker}(\varphi) \cap \operatorname{Ker}(\psi))$ és $\mathbb{R}/(\operatorname{Ker}(\varphi) \vee \operatorname{Ker}(\psi))$ faktorhalmazokat.

9. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Határozzuk meg az $A/(\alpha \cap \beta)$ és $A/(\alpha \vee \beta)$ faktorhalmazokat, ha tudjuk, hogy

$$A/\alpha = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{8, 9, 10\}\},$$
$$A/\beta = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}, \{10\}\}.$$

Határozzuk meg az $\alpha \circ \beta$ relációt is.

10. Legyen $A = \mathbb{R}$, $\tau \colon A \to A,\ x \mapsto |x|$. Határozzuk meg az $A/(\operatorname{Ker}(\varphi) \cap \operatorname{Ker}(\tau))$, $A/(\operatorname{Ker}(\psi) \cap \operatorname{Ker}(\tau))$ és $A/(\operatorname{Ker}(\varphi) \vee \operatorname{Ker}(\tau))$, $A/(\operatorname{Ker}(\psi) \vee \operatorname{Ker}(\tau))$ faktorhalmazokat, ahol φ és ψ a 8. Feladatban definiált leképezések.
