Magasabbfokú egyenletek és geometriai szerkeszthetőség

Dormán Miklós

SZTE, Bolyai Intézet

2010/2011. őszi félév

Hálók

Definíció

Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b, c \in A$. Azt mondjuk, hogy c **alsó korlátja** [**felső korlátja**] a-nak és b-nek, ha $c \leqslant a, b$ [$a, b \leqslant c$].

Hálók

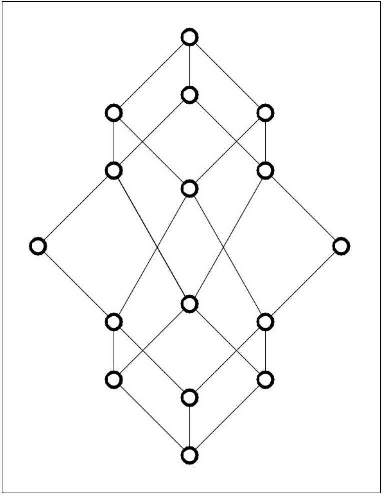
Definíció

Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b, c \in A$. Azt mondjuk, hogy c **alsó korlátja** [**felső korlátja**] a-nak és b-nek, ha $c \leqslant a, b$ $[a, b \leqslant c]$.

Definíció

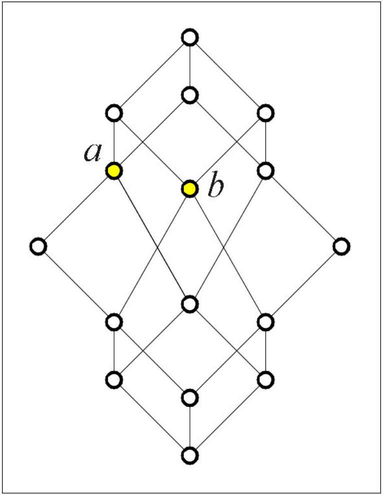
Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b, c_0 \in A$. Azt mondjuk, hogy c_0 **legnagyobb alsó korlátja** [**legkisebb felső korlátja**] a-nak és b-nek, ha $c_0 \leqslant a, b$ $[a, b \leqslant c_0]$ és a, b bármely c alsó korlátjára [felső korlátjára] $c \leqslant c_0$ $[c_0 \leqslant c]$ teljesül.

Hálók



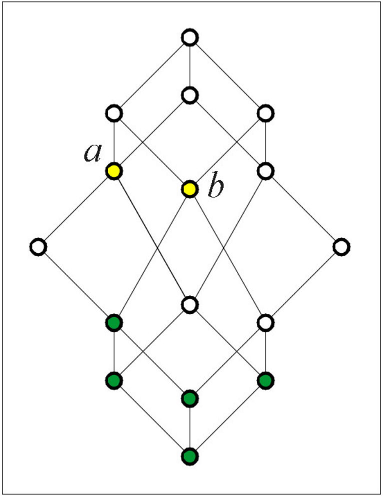
1. ábra: Egy részbenrendezett halmaz.

Hálók



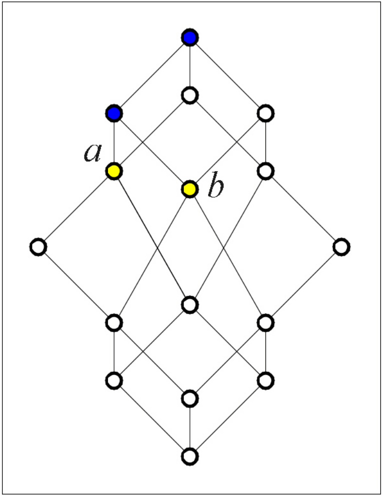
2. ábra: Egy részbenrendezett halmaz.

Hálók



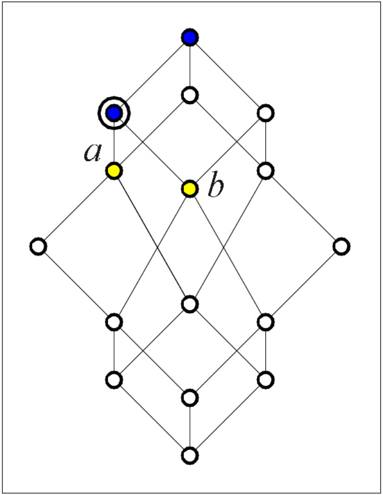
3. ábra: Az a és b elemek alsó korlátai.

Hálók



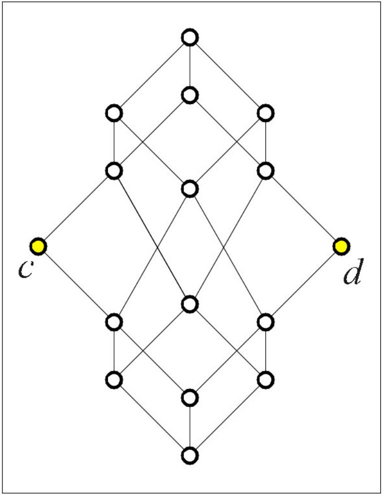
4. ábra: Az *a* és *b* elemek felső korlátai.

Hálók



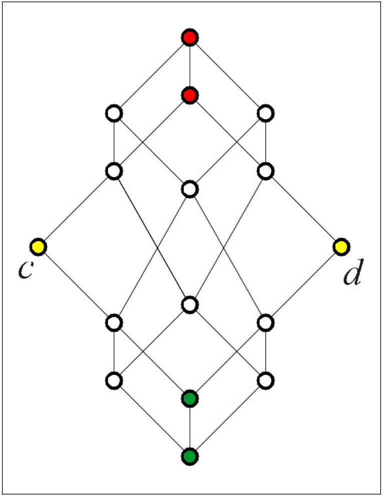
5. ábra: Az *a* és *b* elemek legkisebb felső korlátja.

Hálók



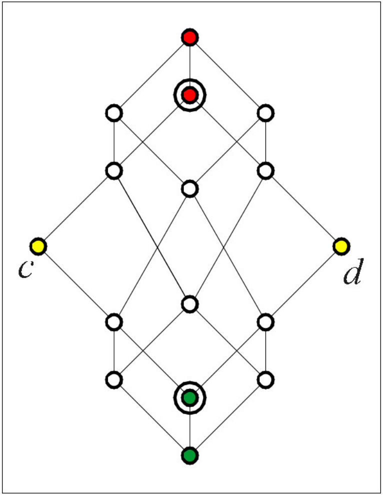
6. ábra: Egy részbenrendezett halmaz.

Hálók



7. ábra: A c éd d elemek alsó és felső korlátai.

Hálók



8. ábra: A l.n.a.k.(c, d) és l.k.f.k(c, d) elemek.

Hálók

Állítás

Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b \in A$. Ha az a és b elemeknek van legnagyobb alsó korlátja [legkisebb felső korlátja], akkor az egyértelműen meghatározott.

Hálók

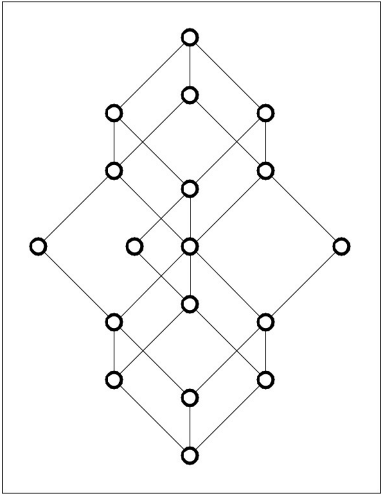
Állítás

Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b \in A$. Ha az a és b elemeknek van legnagyobb alsó korlátja [legkisebb felső korlátja], akkor az egyértelműen meghatározott.

Definíció

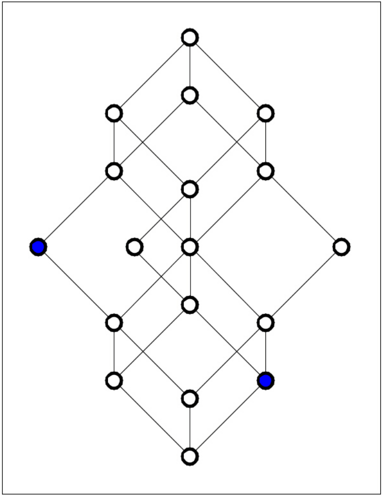
Az $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmazt **hálószerűen rendezett halmaznak** hívjuk, ha az A halmaz bármely a és b elemének létezik legnagyobb alsó, illetve legkisebb felső korlátja.

Hálók



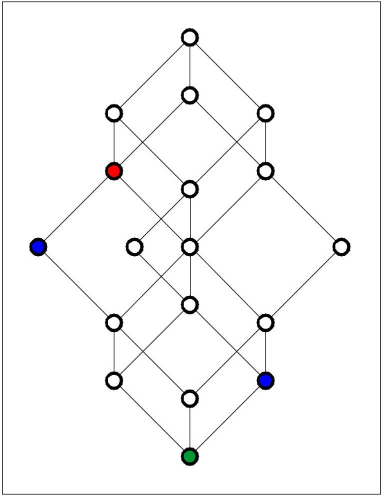
9. ábra: Egy hálószerűen rendezett halmaz.

Hálók



10. ábra

Hálók



11. ábra

Hálók

Példák

részbenrendezett halmaz	legnagyobb alsó korlát	legkisebb felső korlát
$(\mathbb{N};\ \mid\ )$	$\mathrm{ln.k.o.}(a, b)$	$\mathrm{lk.k.t.}(a, b)$,
$(P(U);\ \subseteq\ )$	$X \cap Y$	$X \cup Y$,
$(\mathrm{Sub}(\mathbf{G});\ \subseteq\ )$	$H \cap K$	$\langle H \cup K \rangle$,
$(\mathrm{SubNorm}(\mathbf{G};\ \subseteq\ )$	$M \cap N$	$M \cdot N$.

Hálóazonosságok

Definíció

Legyen $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz. Az L halmazon definiáljuk a $\wedge$ és $\vee$ műveleteket az alábbi módon:

$$\wedge\colon L \times L \to L,\ (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legnagyobb alsó korlátja},$$
$$\vee\colon L \times L \to L,\ (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legkisebb felső korlátja}.$$

Hálóazonosságok

Állítás

Bármely $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz tetszőleges a, b, c elemeire teljesülnek az alábbiak:

$$
\begin{aligned}
a \wedge a &= a, & a \vee a &= a & &\text{(idempotencia)},\\
a \wedge b &= b \wedge a, & a \vee b &= b \vee a & &\text{(kommutativitás)},\\
(a \wedge b) \wedge c &= a \wedge (b \wedge c), & (a \vee b) \vee c &= a \vee (b \vee c) & &\text{(asszociativitás)},\\
(a \wedge b) \vee b &= b, & (a \vee b) \wedge b &= b & &\text{(abszorptivitás)}.
\end{aligned}
$$

Hálóazonosságok

Állítás

Bármely $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz tetszőleges a, b, c elemeire teljesülnek az alábbiak:

$$
\begin{aligned}
a \wedge a &= a, & a \vee a &= a & &\text{(idempotencia)},\\
a \wedge b &= b \wedge a, & a \vee b &= b \vee a & &\text{(kommutativitás)},\\
(a \wedge b) \wedge c &= a \wedge (b \wedge c), & (a \vee b) \vee c &= a \vee (b \vee c) & &\text{(asszociativitás)},\\
(a \wedge b) \vee b &= b, & (a \vee b) \wedge b &= b & &\text{(abszorptivitás)}.
\end{aligned}
$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $(L; \wedge, \vee)$ algebra **háló**, ha tetszőleges $a, b, c \in L$ elemekre teljesülnek a fenti egyenlőségek.

Hálóazonosságok

Tétel

Legyen $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz. Ekkor $(L;\ \wedge\ ,\ \vee\ )$ háló, ahol $\wedge$ és $\vee$ a

$$\wedge\colon L \times L \to L,\ (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legnagyobb alsó korlátja,}$$
$$\vee\colon L \times L \to L,\ (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legkisebb felső korlátja.}$$

műveletek.

Hálóazonosságok

Tétel

Legyen $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz. Ekkor $(L; \wedge, \vee)$ háló, ahol $\wedge$ és $\vee$ a

$$\wedge\colon L \times L \to L,\ (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legnagyobb alsó korlátja,}$$
$$\vee\colon L \times L \to L,\ (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legkisebb felső korlátja.}$$

műveletek.

Tétel

Legyen $(L; \wedge, \vee)$ háló. Ekkor $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz, ahol $\leqslant$ a következő részbenrendezés az L halmazon:

$$a \leqslant b \iff a \wedge b = a \quad (\iff a \vee b = b).$$

Hálóazonosságok

Definíció

Legyenek $\mathbf{L}_1 = (L_1; \wedge_1, \vee_1)$ és $\mathbf{L}_2 = (L_2; \wedge_2, \vee_2)$ hálók, a hozzájuk tartozó hálószerűen rendezett halmazok legyenek rendre $(L_1; \leqslant_1)$ és $(L_2; \leqslant_2)$, valamint $\varphi\colon L_1 \to L_2$ tetszőleges leképezés. Azt mondjuk, hogy a φ leképezés **rendezéstartó**, ha tetszőleges $a, b \in L_1$-re $a \leqslant_1 b$ esetén $a\varphi \leqslant_2 b\varphi$.

Hálóazonosságok

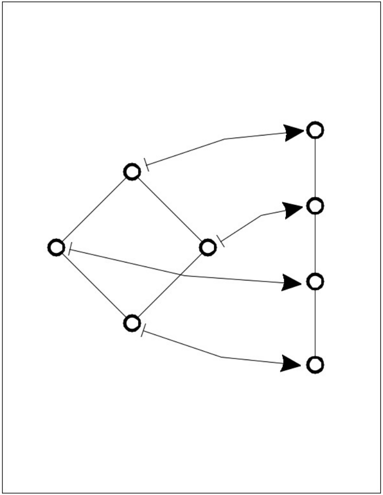
Definíció

Legyenek $\mathbf{L}_1 = (L_1; \wedge_1, \vee_1)$ és $\mathbf{L}_2 = (L_2; \wedge_2, \vee_2)$ hálók, a hozzájuk tartozó hálószerűen rendezett halmazok legyenek rendre $(L_1; \leqslant_1)$ és $(L_2; \leqslant_2)$, valamint $\varphi\colon L_1 \to L_2$ tetszőleges leképezés. Azt mondjuk, hogy a φ leképezés **rendezéstartó**, ha tetszőleges $a, b \in L_1$-re $a \leqslant_1 b$ esetén $a\varphi \leqslant_2 b\varphi$.

Tétel

Legyenek $\mathbf{L}_1 = (L_1; \wedge_1, \vee_1)$ és $\mathbf{L}_2 = (L_2; \wedge_2, \vee_2)$ hálók. Ha a $\varphi\colon L_1 \to L_2$ leképezés homomorfizmus, akkor φ rendezéstartó.

Hálóazonosságok



12. ábra: Nem minden rendezéstartó bijekció izomorfizmus.

Az előző tétel állításának megfordítása nem igaz, azaz rendezéstartó leképezés nem feltétlenül homomorfizmus. Azonban igaz a következő.

Tétel

Legyenek $\mathbf{L}_1 = (L_1; \wedge_1, \vee_1)$ és $\mathbf{L}_2 = (L_2; \wedge_2, \vee_2)$ hálók, valamint $\varphi\colon L_1 \to L_2$ bijektív leképezés. Ekkor φ pontosan akkor izomorfizmus, ha a φ és φ^{-1} leképezések mindegyike rendezéstartó.

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

(1) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

(1) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

(2) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

(1) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

(2) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

Definíció

Az $\mathbf{L}$ háló **disztributív**, ha a fenti tétel (1) pontja teljesül $\mathbf{L}$-ben.

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

(1) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

(2) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

Definíció

Az $\mathbf{L}$ háló **disztributív**, ha a fenti tétel (1) pontja teljesül $\mathbf{L}$-ben.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{L}$ háló **moduláris**, ha bármely $x, y, z \in L$-re $x \leqslant z$ esetén $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$.

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges háló bármely x, y, z elemére teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge z,$$
$$(x \wedge y) \vee z \leqslant (x \vee z) \wedge (y \vee z),$$

valamint, ha $x \leqslant z$, akkor $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge z$.

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges háló bármely x, y, z elemére teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge z,$$
$$(x \wedge y) \vee z \leqslant (x \vee z) \wedge (y \vee z),$$

valamint, ha $x \leqslant z$, akkor $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge z$.

Állítás

(1) Bármely vektortér altérhálója moduláris háló.
(2) Bármely csoport normális részcsoportjainak hálója moduláris háló.

Hálóazonosságok

Tétel [Richard Dedekind, 1900]

Legyen $\mathbf{L}$ tetszőleges háló. Az $\mathbf{L}$ háló pontosan akkor moduláris, ha nincs az $\mathbf{N}_5$ hálóval izomorf részhálója.

Hálóazonosságok

Tétel [Richard Dedekind, 1900]

Legyen **L** tetszőleges háló. Az **L** háló pontosan akkor moduláris, ha nincs az $\mathbf{N}_5$ hálóval izomorf részhálója.

Tétel [Garrett Birkhoff]

Az **L** moduláris háló pontosan akkor disztributív, ha nincs a $\mathbf{M}_3$ hálóval izomorf részhálója.

Hálóazonosságok

Tétel [Richard Dedekind, 1900]

Legyen **L** tetszőleges háló. Az **L** háló pontosan akkor moduláris, ha nincs az $\mathbf{N}_5$ hálóval izomorf részhálója.

Tétel [Garrett Birkhoff]

Az **L** moduláris háló pontosan akkor disztributív, ha nincs a $\mathbf{M}_3$ hálóval izomorf részhálója.

Hálóazonosságok

Tétel [Richard Dedekind, 1900]

Legyen **L** tetszőleges háló. Az **L** háló pontosan akkor moduláris, ha nincs az $\mathbf{N}_5$ hálóval izomorf részhálója.

Tétel [Garrett Birkhoff]

Az **L** moduláris háló pontosan akkor disztributív, ha nincs a $\mathbf{M}_3$ hálóval izomorf részhálója.