Csoportok

1. Legyen $\mathbf{G} = (G;\, \cdot\,)$ tetszőleges csoport, továbbá legyen

$$Z(\mathbf{G}) = \{z \in G \mid g \cdot z = z \cdot g \ (\forall g \in G)\}\,.$$

Mutassa meg, hogy $Z(\mathbf{G}) \triangleleft \mathbf{G}$. A $Z(\mathbf{G})$ normális részcsoportot a $\mathbf{G}$ csoport centrumának nevezzük.

2. Legyen N kételemű normális részcsoport a $\mathbf{G}$ csoportban. Igazolja, hogy $N \subseteq Z(\mathbf{G})$.

3. Határozza meg a D_4, S_4, A_4 és Q csoportok centrumát.

4. Mely ismert csoporttal izomorf a $\mathbf{G}/N$ faktorcsoport?

(a) $\mathbf{G} = (S_4;\, \circ\,)$, $N = V$;

(b) $\mathbf{G} = (D_4;\, \circ\,)$, $N = \{1, f^2\}$ (f a $\pi/4$ szögű forgatás).

(c) $\mathbf{G} = (\mathbb{C} \setminus \{0\};\, \cdot\,)$, $N = \{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \overline{z} = 1\}$.

Gyűrűk

5. Legyen A tetszőleges halmaz. Mutassuk meg, hogy a $(P(A); \Delta,\, \cap\,)$ algebra gyűrű.

6. Legyen $\mathbf{R} = (R;\, +\, ,\, \cdot\,)$ egységelemes gyűrű. Bizonyítsa be, hogy ha az $a, b \in R$ elemekre $1 - a \cdot b$ invertálható, akkor $1 - b \cdot a$ is.

7. Döntse el, hogy az $\mathbf{R}$ gyűrű I és J részhalmazai részgyűrűt, illetve ideált alkot-e. Amennyiben $I \triangleleft \mathbf{R}$, akkor döntse el, hogy I főideál-e, valamint adja meg az $\mathbf{R}/I$ elemeit és művelettáblázatát.

(a) $\mathbf{R} = (\mathbb{Z};\, +\, ,\, \cdot\,)$, $I = 2 \cdot \mathbb{Z} + 1$, $J = 2 \cdot \mathbb{Z}$;

(b) $\mathbf{R} = (\mathbb{Z}[i];\, +\, ,\, \cdot\,)$, $I = \mathbb{Z}$, $J = 2 \cdot \mathbb{Z} + 2i \cdot \mathbb{Z}$;

(c) $\mathbf{R} = (\mathbb{Z}[x];\, +\, ,\, \cdot\,)$, $I = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) \text{ osztható 3-mal}\}$, $J = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) \neq 1\}$;

(d) $\mathbf{R} = (\mathbb{R}[x];\, +\, ,\, \cdot\,)$, $I = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(1) = 0\}$, $J = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) = 1\}$;

(e) $\mathbf{R} = (\mathbb{R}^{2\times 2};\, +\, ,\, \cdot\,)$, $I = \big\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) \neq 0\big\}$, $J = \big\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) = 1\big\}$.

8. Az $\mathbf{R} = (R;\, +\, ,\, \cdot\,)$ egységelemes gyűrűt *Boole-gyűrűnek* nevezzük, ha $r^2 = r$ teljesül tetszőleges $r \in R$ elemre. Mutassa meg, hogy ha $\mathbf{R}$ Boole-gyűrű, akkor bármely $r \in R$ elemre igaz, hogy $r + r = 0$, valamint $\mathbf{R}$ kommutatív gyűrű.

9. Legyen α az alábbi leképezés:

$$\alpha\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ f \mapsto \begin{pmatrix} f(0) & 0 \\ f'(0) & f(0) \end{pmatrix}.$$

Igazolja, hogy α homomorfizmus. Határozza meg α kép- és magterét.

10. Legyen A tetszőleges halmaz. Mutassa meg, hogy tetszőleges $B \subseteq A$ halmazra $\mathbf{P}(B) \triangleleft \mathbf{P}(A)$, valamint igazolja, hogy $\mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(B) \cong \mathbf{P}(A \setminus B)$.

11. Igazolja, hogy $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$. Igaz-e, hogy $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 2) \cong \mathbb{C}$, illetve $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{C}$?

12. Határozza meg az $x^3 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ elem inverzét az $\mathbb{R}[x]/(x^3 + x^2 + 1)$ faktorgyűrűben.

Kötelező házi feladat(ok)

8. Legyen $\mathbf{R} = (R;\, +\,,\, \cdot\,)$ egységelemes gyűrű. Legyenek $\oplus$ és $\odot$ az alábbi műveletek R-en:

$$\oplus\colon R^2 \to R,\ \ a \oplus b = a + b - 1,$$
$$\odot\colon R^2 \to R,\ \ a \odot b = a + b - a \cdot b,$$

ahol $1 \in R$ az $\mathbf{R}$ gyűrű egységeleme. Mutassa meg, hogy $(R;\, \oplus\,,\, \odot\,)$ is gyűrű.

9. Igaz-e, hogy a $(\mathbb{Z}[i];\, +\,,\, \cdot\,)$ gyűrű $I = (1 + 2i, 3 + i)$ ideálja főideál?

Szorgami feladat(ok)

16. Mutassa meg, hogy ha $\mathbf{G}$ nem Abel-csoport, akkor rendje legalább 6.

17. Legyen

$$R_f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$
$$R_a = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bizonyítsuk be a következőket:

(a) $\mathbf{R}_f = (R_f; +, \cdot)$ és $\mathbf{R}_a = (R_a; +, \cdot)$ részgyűrűje $\mathbb{R}^{2\times 2}$-nek.

(b) az $\mathbf{R}_f$ és $\mathbf{R}_a$ gyűrűk anti-izomorfak, azaz van olyan $\varphi\colon R_f \to R_a$ leképezés, amelyre tetszőleges $A, B \in R_f$ esetén
$$(A + B)\varphi = A\varphi + B\varphi \quad \text{és} \quad (A \cdot B)\varphi = B\varphi \cdot A\varphi$$
teljesül.

Igaz-e, hogy az $\mathbf{R}_f$ és $\mathbf{R}_a$ gyűrűk izomorfak?

Kedves Hallgatóim!

Kérem, hogy –lehetőség szerint– a Kötelező Házi Feladatokat és a Szorgalmi feladatokat is feladatonként külön lapra írva adják be, a feladat sorszámának megjelölésével.

Szeged, 2010. november 22.

Köszönettel: Dormán Miklós