CSOPORTOK

1. Írja fel az alábbi permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként. Határozza meg a permutációk paritását is.

(a) $\pi\colon \{1,2,\ldots,9\} \to \{1,2,\ldots,9\},\ x \mapsto 10-x$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 2 & 9 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) $(1\,2\,3)(2\,3\,4)(3\,4\,5\,6)^{-1}$;

(d) $(1\,2\,3\,5)^{-1}(2\,3\,4)(1\,6)(1\,2\,3\,4)$;

(e) $(1\,2)^{-1}(2\,3)(2\,6)(4\,2)$.

2. Legyen $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ és $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Írja fel az alábbi permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként: $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, $\alpha^{-1}\beta^{-1}$, $\alpha^{-1}\beta\alpha$, $\alpha^{2^{2010}}$, $(\beta^{-1}\alpha\beta)^{2011}$.

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket S_5-ben:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{2010} \pi(1\,2\,3)(5\,1\,2\,4) = (3\,4)$;

(b) $(1\,2\,3)^{2012}\pi^2(1\,2\,3) = (1\,3\,4)$.

4. Csoportot alkot-e a G halmaz a $*$ műveletre vonatkozóan?

(a) $G = \{\pi \in S_4 : \pi \text{ páros}\}$ és $\alpha * \beta = \alpha \circ \beta$ $(\alpha, \beta \in G)$;

(b) $G = \mathbb{R}$ és $r * s = r \cdot s$ $(r, s \in G)$;

(c) $G = \mathbb{Z}_6 \setminus \{\overline{0}\}$ és $a * b = a \cdot b$ $(a, b \in G)$;

(d) $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ és $a * b = a/b$ $(a, b \in G)$;

(e) $G = P(H)$ és $X * Y = X \,\triangle\, Y$ $(X, Y \in G)$, ahol H tetszőleges halmaz.

5. Határozza meg a megadott elemek rendjét a $\mathbf{G}$ csoportban:

(a) $\mathbf{G} = (S_9; \circ)$, $\alpha = (1\,2\,3)(2\,4\,8)$, α^2, α^3;

(b) $\mathbf{G} = (\mathbb{Z}_9; +)$, $\alpha \in \{\overline{1}, \overline{2}\}$;

(c) $\mathbf{G} = (\{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^{12} = 1\}\,;\, \cdot\,)$, $\alpha \in \{\cos(k\pi/6) + i\sin(k\pi/6) : k = -1, 1, 5\}$;

(d) $\mathbf{G} = (R_{24};\, \cdot\,)$, $\alpha \in \{\overline{5}, \overline{7}\}$;

(e) $\mathbf{G} = (\{r \in \mathbb{R} : -1 < r < 1\}\,; *)$, $\alpha \in \{0, 1/2\}$.

6. Milyen elemrendek fordulnak elő az S_k szimmetrikus csoportban ($k \in \{5, 6, 7, 8\}$)?

7. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{G}$ csoport bármely g és h elemeire teljesülnek az alábbiak:

(a) $\mathfrak{o}(g) = \mathfrak{o}(h^{-1}gh)$;

(b) $\mathfrak{o}(gh) = \mathfrak{o}(hg)$;

(c) $\mathfrak{o}(g^k) = \dfrac{\mathfrak{o}(g)}{\text{ln.k.o.}(k, \mathfrak{o}(g))}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

8. Legyenek H és K a $\mathbf{G}$ véges csoport olyan részcsoportjai, amelyekre ln.k.o.$(|H|,|K|)=1$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $H\cap K$ csak az egységelemet tartalmazza.

9. Legyenek M és N a $\mathbf{G}$ csoport olyan normális részcsoportjai, amelyekre $M\cap N$ csak az egységelemet tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy $mn=nm$ teljesül tetszőleges $m\in M$ és $n\in N$ elemekre.

10. Határozza meg a $\mathbf{G}$ csoport H és K részhalmazai által generált részcsoportokat:

(a) $\mathbf{G}=(S_6;\circ)$, $\quad H=\{(1\,2),(1\,2\,3\,4)\}$, $K=\{(1\,2\,3),(4\,5\,6)\}$;

(b) $\mathbf{G}=(\mathbb{Z}_{28};+)$, $\quad H=\{\overline{5}\}$, $K=\{\overline{6},\overline{8}\}$;

(c) $\mathbf{G}=(R_{28};\,\cdot\,)$, $\quad H=\{\overline{5}\}$, $K=\{\overline{3},\overline{11}\}$;

(d) $\mathbf{G}=(Q;+)$, $\quad H=\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $K=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\}$;

(e) $\mathbf{G}=(\left\{\varepsilon\in\mathbb{C}:\varepsilon^{28}=1\right\};\,\cdot\,)$, $\quad H=\left\{\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right\}$, $K=\left\{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right\}$.

11. Melyek ciklikusak az alábbi csoportok között? Ciklikus csoportok esetén keressük meg az összes egyelemű generátorrendszert.

(a) $\mathbf{G}=(S_3;\circ)$;

(b) $\mathbf{G}=(A_3;\circ)$;

(c) $\mathbf{G}=(R_{28};\,\cdot\,)$;

(d) $\mathbf{G}=(R_{14};\,\cdot\,)$;

(e) $\mathbf{G}=(\left\{\varepsilon\in\mathbb{C}:\varepsilon^{28}=1\right\};\,\cdot\,)$.

12. Legyen n természetes szám, $\alpha,\beta\in S_n$. Mikor lesz homomorfizmus a

$$\varphi\colon S_n\to S_n,\ \pi\mapsto\alpha\pi\beta$$

leképezés?

13. Mely k egész számokra lesz homomorfizmus a

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{15}\to\mathbb{Z}_6,\ \overline{n}\mapsto\overline{2kn}$$

leképezés?

14. Izomorfak-e egymással az alábbi csoportok?

(a) $\mathbf{G}_1=(R_{10};\,\cdot\,)$, $\quad\mathbf{G}_2=(R_8;\,\cdot\,)$;

(b) $\mathbf{G}_1=(R_{15};\,\cdot\,)$, $\quad\mathbf{G}_2=(\mathbb{Z}_8;+)$;

(c) $\mathbf{G}_1=(D_4;\circ)$, $\quad\mathbf{G}_2=(Q;\,\cdot\,)$;

(d) $\mathbf{G}_1$: a $(0,0)$ középpontú egységnyi sugarú kör szimmetriacsoportja, $\quad\mathbf{G}_2=(\mathbb{C}\setminus\{0\};\,\cdot\,)$;

(e) $\mathbf{G}_1=(G;\,\cdot\,)$, ahol

$$G=\left\{\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{0}\\\overline{0}&\overline{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{0}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{0}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{0}\\\overline{1}&\overline{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{1}\\\overline{0}&\overline{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{0}\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{Z}_2^{2\times 2},$$

$\mathbf{G}_2=(S_3;\circ)$.

15. Legyen $\mathbf{G}$ csoport és H részcsoportja $\mathbf{G}$-nek. Írja fel a H szerinti bal-, illetve jobboldali mellékosztályokat. Döntse el, hogy normálosztó-e H a $\mathbf{G}$ csoportban. Amennyiben H nem normálosztó határozza meg a H részcsoportot tartalmazó legszűkebb normális részcsoportot.

(a) $\mathbf{G}=(S_4;\circ)$, $H=\{(1\,2)\}$;

(b) $\mathbf{G}=(S_4;\circ)$, $H=V$;

(c) $\mathbf{G}=(S_4;\circ)$, $H=\{\pi\in S_4:\pi(\{1,2\})=\{1,2\}\}$;

(d) $\mathbf{G}=(\mathbb{Z};+)$, $H=\{2z:z\in\mathbb{Z}\}$;

(e) $\mathbf{G}=(D_4;\circ)$, $H=\left\langle\varphi^2\right\rangle$;

(f) $\mathbf{G}=(D_4;\circ)$, $H=\langle\tau\rangle$;

(g) $\mathbf{G}=(Q_8;\,\cdot\,)$, $H=\langle j\rangle$.

Kötelező házi feladat(ok)

6. Legyen $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ és $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Írja fel az alábbi permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként: $\alpha\beta^2\alpha^3\beta^4$, $(\beta^{-2}\alpha^{-3})^{-4}$.

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket S_5-ben:

(a) $(1\,2\,3\,4)\pi(4\,3\,2\,1) = (3\,5)$;

(b) $(1\,2\,3)\pi^2(2\,3\,4) = (3\,4\,5)$.

Szorgami feladat(ok)

10. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. (Az igaz állításokat bizonyítsa be, a hamisakra adjon ellenpéldát.)

(a) Van olyan végtelen csoport, amelynek minden eleme véges rendű.

(b) Nincs olyan végtelen csoport, amelyben csak véges sok véges rendű elem van.

(c) Van olyan csoport, amelyben csak véges sok végtelen rendű elem van.

11. A $\mathbf{G}$ csoport bármely elemének rendje legfeljebb 2. Mutassa meg, hogy $\mathbf{G}$ Abel-csoport.

12. Igazolja, hogy $(\mathbb{Q}; +)$ minden végesen generált részcsoportja ciklikus.

13. Legyen $\mathbf{G}$ Abel-csoport.

(a) Bizonyítsa be, hogy $\{g \in \mathbf{G} : \mathfrak{o}(g) \leqslant 2\}$ részcsoport $\mathbf{G}$-ben.

(b) Mutassa meg, hogy $\{g \in \mathbf{G} : \mathfrak{o}(g) \leqslant 3\}$ nem feltétlenül részcsoport $\mathbf{G}$-ben.

14. Izomorfak-e a $(\mathbb{Z}[x]; +)$ és $(\mathbb{Q}_{>0}; \cdot)$ csoportok?

15. Milyen m és n természetes számokra van S_m-nek $\mathbb{Z}_n$-nel, illetve D_n-nel izomorf részcsoportja?

Kedves Hallgatóim!

Kérem, hogy –lehetőség szerint– a Kötelező Házi Feladatokat és a Szorgalmi feladatokat is feladatonként külön lapra írva adják be, a feladat sorszámának megjelölésével.

Szeged, 2010. november 8.

Köszönettel: Dormán Miklós