LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK ÉS MÁTRIXOK MINIMÁLPOLINOMJA, CAYLEY-HAMILTON-TÉTEL. MÁTRIXOK JORDAN-FÉLE NORMÁLALAKJA.

1. Legyen V véges dimenziós valós euklideszi tér, valamint $\varphi\colon V \to V$ olyan lineáris transzformáció, amely szimmetrikus és ortogonális. Mutassa meg, hogy $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$.

2. Legyen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrix. Mutassuk meg, hogy van olyan $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ortogonális és $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertálható mátrix, amelyekre

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \pm 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & B \end{pmatrix}$$

teljesül.

3. Határozzuk meg az összes $\mathbb{Q}$ feletti Jordan-mátrixot, amely

(a) 4×4-es és minimálpolinomja $(x+1)^2$;

(b) 6×6-os és minimálpolinomja $(x+2)^2(x-1)$;

(c) 7×7-es és minimálpolinomja $(x+1)^2(x-3)$;

(d) 6×6-os és minimálpolinomja $(x^4-1)(x^2-1)$.

4. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle nomrálalakját a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Határozzuk meg az alábbi $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok Jordan-féle nomrálalakját:

(a) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j-i=1, \\ 0, & \text{egyébként;} \end{cases}$

(b) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j-i\equiv 1 \pmod{n}, \\ 0, & \text{egyébként;} \end{cases}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i+j=n+1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

6. Lehetnek-e egy valós mátrix invariáns faktorai a következők? Ha a válasz 'igen', akkor írjuk fel a mátrix Jordan-féle normálalakját.

(a) $1,\ 1,\ 1,\ (x-2)^2,\ (x-1)(x^2+x+1)$;

(b) $1,\ 1,\ x-2,\ (x-2)(x-1)$;

(c) $1,\ 1,\ x-1,\ (x-1)(x^2+2x-2)$;

(d) $1,\ x-3,\ (x-3)^3, (x-3)^3(x^2+x+1)$;

(e) $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ x-\sqrt{2},\ (x-\sqrt{2})^2,\ (x-\sqrt{2})^2(x^2-x+10)$.

A további feladatokban V mindig véges dimenziós vektortér a K test felett.

7. Melyek azok a $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ lineáris transzformációk, amelyek m_φ minimálpolinomja elsőfokú?

8. Hogyan olvasható le a $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ lineáris transzformáció minimálpolinomjáról, hogy φ-nek létezik inverze?

9. Legyen $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ invertálható lineáris transzformáció. Bizonyítsa be, hogy van olyan $f \in K[x]$ polinom, amelyre $\varphi^{-1} = f(\varphi)$ teljesül. Mi a kapcsolat φ és φ^{-1} minimálpolinomja között?

10. Legyenek $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$ lineáris transzformációk. Mi a kapcsolat $\varphi\psi$ és $\psi\varphi$ minimálpolinomja között?

11. Legyen $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Mely $u \in V$ vektorokra lesz $[v, \varphi]$ legfeljebb 1-dimenziós?

12. Tekintsük az

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

sorozatot, ahol $a_1 = b_1 = 1$ és $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

határértéket.

13. Legyen $u = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$. Jelölje U az u vektor által generált φ-invariáns alteret. Határozza meg a $\varphi_U = \varphi|_U$ lineáris transzformáció minimálpolinomját.

14. A 3×3-as $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrix *bűvös*, ha minden sorában, minden oszlopában és a két átlójában lévő számok összege egyenlő valamely $\vartheta \in \mathbb{C}$-vel.

(a) Bizonyítsa be, hogy ha az M mátrix bűvös, akkor $\vartheta = 3m_{22}$.

(b) Mutassa meg, hogy tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$-re pontosan egy olyan $M(\alpha, \beta, \gamma)$ bűvös mátrix van, amelyre

$$m_{22} = \alpha, \quad m_{11} = \alpha + \beta, \quad m_{31} = \alpha + \gamma$$

teljesül.

(c) Igazolja, hogy $\{M(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$ altere $\mathbb{C}^{3\times 3}$-nek, amelynek bázisa $M(1, 0, 0)$, $M(0, 1, 0)$, $M(0, 0, 1)$.

(d) Legyen $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa a standard bázisban $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Határozza meg f sajátértékeit.
