ÖNADJUNGÁLT ÉS ORTOGONÁLIS LEKÉPEZÉSEK, ORTOGONÁLIS MÁTRIXOK.

1. Legyen V a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok szokásos vektortere. Igaz-e, hogy az alábbi leképezések skalárszorzatot definiálnak?

(a) $S\colon V\times V\to\mathbb{R},\ S(f,g)=\int_{-1}^{+1}f(t)g(t)\,dt$;

(b) $S\colon V\times V\to\mathbb{R},\ S(f,g)=f(1)g(1)+f'(1)g'(1)+f''(1)g''(1)$;

(c) $S\colon V\times V\to\mathbb{R},\ S(f,g)=\sum_{j=-4}^{4}f(j)g(j)$.

Határozzuk meg a $\varphi\colon V\to V,\ f\mapsto f''$ lineáris transzformáció adjungáltját.

2. Tekintsük a térvektorok $\mathbb{R}^3$ vektorterében a szokásos skalárszorzatot. Határozzuk meg a $\varphi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ u\mapsto u\times u_0$ lineáris transzformáció adjungáltját, ahol $u_0\in\mathbb{R}^3$ rögzített vektor.

3. Legyen a $\varphi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban

(a) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Adjon meg φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázist az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térben.

4. Legyen

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Adjon meg olyan D ortogonális mátrixot, amelyre a $D^{-1}AD$ mátrix diagonális.

5. Hajtson végre főtengelytranszformációt az alábbi kvadratikus alakon:

$$2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2.$$

6. Legyen az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér φ lineáris transzformációjának mátrixa a standard bázisban $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Adjon meg bázist a v vektor által generált invariáns altérben.

(a) $A=\begin{pmatrix}3&5&-1\\-1&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $v=(1,2,-1)$;

(b) $A=\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\4&1&-2&0\\5&0&-3&-1\\-7&0&5&2\end{pmatrix}$, $v=(1,1,-1,0)$.

7. Igazolja, hogy egy ortogonális transzformáció karakterisztikus polinomjának minden valós gyöke 1 abszolút értékű.

8. Adjon példát olyan ortogonális transzformációra, amelynek nincs valós sajátértéke.

9. Mutassuk meg, hogy ha a $\varphi\colon V\to V$ lineáris transzformációra $\varphi^2=0$ teljesül, akkor $\varphi(u)\perp\varphi^*(u)$ $(u\in V)$.

10. Legyenek φ és ψ a V véges dimenziós euklideszi tér lineáris transzformációi. Igazoljuk az alábbiakat.

(a) Ha $\varphi^*\varphi = 0$, akkor $\varphi = 0$.

(b) $\mathrm{Ker}\,(\varphi^*\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ és $\mathrm{Im}\,(\varphi^*\varphi) = \mathrm{Im}\,(\varphi)$.

(c) Ha $\varphi^*\psi = 0$, akkor $\mathrm{Im}\,(\varphi) \perp \mathrm{Im}\,(\psi)$ és $\mathrm{Ker}\,(\varphi + \psi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap \mathrm{Ker}\,(\psi)$.

Kötelező házi feladat(ok)

5. Legyen a $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa az $\mathcal{E} = \{(1,1,-1), (-1,2,0), (2,1,-2)\}$ bázisban

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Határozza meg a φ^* transzformáció mátrixát az $\mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-1,1,2) \right\}$ bázisban.

Szorgami feladat(ok)

7. Legyen $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ önadjungált lineáris transzformáció. Mutassuk meg, hogy ha a $\Phi = \{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ halmaz elemei nem páronként különbözőek, akkor $|\Phi| \leqslant 2$.

8. Legyen $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Mutassuk meg, hogy

(i) $\mathrm{Ker}\,(\varphi^*) = (\mathrm{Im}\,(\varphi))^\perp$,

(ii) $\mathrm{Im}\,(\varphi^*) = (\mathrm{Ker}\,(\varphi))^\perp$.

9. Bizonyítsa be, hogy minden, legalább két dimenziós euklideszi térben végtelen sok ortonormált bázis van.
