Euklideszi terek,
Lineáris leképezés adjungáltja és mátrixa ortonormált bázisban

Legyen V valós Euklideszi tér a

$$\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R},\ (u,v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

belsőszorzattal, U altere V-nek és $f \in \mathcal{L}(V)$. Ekkor az U altér *ortogonális komplementere* az

$$U^{\perp} = \{v \in V : u \perp \text{ minden } u \in U\text{-ra}\}$$

altér. Az f lineáris transzformácó *adjungáltja* az az egyértelműen meghatározott $f^* \colon V \to V$ lineáris transzformáció, amelyre

$$\langle uf, v \rangle = \langle u, vf^* \rangle$$

teljesül tetszőleges $u, v \in V$-re. Az f lineáris transzformáció *önadjungált*, ha $f = f^*$.

1. Legyen V véges dimenziós valós Euklideszi tér, $U, W \leqslant V$. Mutassuk meg, hogy

(a) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$;
(b) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

2. Határozza meg az U altér ortogonális komplementerét a V vektortérben.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = [(2, -1)]$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $U = [(1, 2, 3), (-1, 0, 2)]$;
(c) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $U = [(\overline{0}, \overline{2}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{0}, \overline{2})]$.

3. Legyen V valós Euklideszi tér. Mutassa meg, hogy

$$\left\langle v - \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} \cdot u, u \right\rangle = 0$$

teljesül tetszőleges $u, v \in V$-re.

4. Hajtsa végre a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást az alábbi vektorrendszerekre:

(a) $\{(1, 2), (0, 2), (3, 2)\}$;
(b) $\{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$;
(c) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (2, -1, -1, 0)\}$.

5. Határozza meg az $U \leqslant \mathbb{R}^4$ altér $U^{\perp}$ ortogonális komplementerének egy ortonormált bázisát.

(a) $U = [(1, 2, 1, -1)]$;
(b) $U = [(1, 2, 0, -3), (1, 0, 1, 0)]$;
(c) $U = \{(a, b, c, d) : a - b + c - d = 0\}$.

6. Legyen $I = \{r \in \mathbb{R} : 0 \leqslant r \leqslant 1\}$. Jelölje $C(I)$ az I intervallumon folytonos valós értékű függvények vektorterét.

(a) Mutassa meg, hogy $C(I)$ valós Euklideszi tér az

$$\langle -, - \rangle : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R},\ \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

belsőszorzattal.

(b) Legyen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1,\ g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ és $h\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x^2$. Adjon meg ortonormált bázist $[f, g, h]$-ben.

7. Határozza meg a $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ lineáris transzformáció φ^* adjungáltját.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $(a, b)\varphi = (a + b, a - b) \quad (a, b \in \mathbb{R})$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$ és φ mátrixa az $\mathcal{F} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ bázisban $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) $V = C(I)$ (ld. előző feladat), $\varphi\colon V \to V,\ u \mapsto \langle u, f \rangle \cdot g$, ahol $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$.

8. Legyen φ az $\mathcal{S}$ síkon az $y = x$ egyenesre vonatkozó merőleges vetítés. Határozzuk meg φ adjungáltját.

Kötelező házi feladat(ok)

3. Legyen V valós Euklideszi tér. Mutassa meg, hogy tetszőleges $u, v \in V$-re teljesülnek az alábbiak:

(a) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$;

(b) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$;

(c) ha $\|u\| = \|v\|$, akkor $\langle u + v, u - v \rangle = 0$.

4. Hajtsa végre a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást az alábbi vektorrendszerekre:

(a) $\{(2, 1), (1, -1), (2, 3)\}$;

(b) $\{(1, -1, 1, 1), (-1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1)\}$.

Szorgami feladat(ok)

4. Hányféleképpen állítható elő a $\mathbb{Z}_5^4$ vektortér két valódi alterének összegeként?

Legyen V vektortér és $f \in \mathcal{L}(V)$. Az f lineáris leképezést *projekciónak* nevezzük, ha $f \circ f = f$.

5. Legyen V vektrotér $\mathbb{R}$ felett és $e, f \in \mathcal{L}(V)$ projekciók. Mutassuk meg, hogy $e + f$ pontosan akkor projekció, ha $e \circ f = f \circ e = 0$. Határozzuk meg az $\mathrm{Im}\,(e + f)$ és $\mathrm{Ker}\,(e + f)$ altereket, ha $e + f$ projekció.

6. Legyen $U = \{(a, a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \leqslant \mathbb{R}^3$.

(a) Van-e olyan U' altér az $\mathbb{R}^3$ vektortérben, amelyre $\mathbb{R}^3 = U \oplus U'$ teljesül?

(b) Vannak-e olyan $e, f \in \mathcal{L}(V)$ projekciók, amelyre $\mathrm{Im}\,(e) = U$, $\mathrm{Ker}\,(e) = U'$ és $\mathrm{Im}\,(f) = U'$, $\mathrm{Ker}\,(f) = U$ teljesül?
