Alterek direkt összege,
Lineáris transzformációk és mátrixok sajátalterei

1. Döntse el, hogy teljesülnek-e az $\mathbb{R}^4 = U + V$, illetve $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ egyenlőségek az alábbi $U, V \leqslant \mathbb{R}^4$ alterekre.

(a) $U = [(1,2,1,1),(0,1,2,3)]$ és $V = [(1,2,2,3),(0,1,3,5),(0,0,1,2)]$;

(b) $U = [(1,1,2,2),(1,2,1,2)]$ és $V = [(2,1,2,1),(1,2,2,2)]$;

(c) $U = [(1,-1,2,1),(1,2,0,-2)]$ és $V = [(1,1,-1,1),(2,1,2,-1)]$;

(d) $U = [(1,1,-1,2),(1,-1,1,0),(2,0,1,0)]$ és $V = [(1,1,1,1),(1,0,1,0),(1,3,-3,4)]$.

2. Legyen

$$u_1 = (\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1}),\quad u_2 = (\overline{2},\overline{1},\overline{1},\overline{0}),$$
$$u_3 = (\overline{0},\overline{2},\overline{0},\overline{1}),\quad u_4 = (\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{2}),$$

valamint $U_1 = [u_1, u_2]$ és $U_2 = [u_3, u_4]$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}_3^4 = U_1 \oplus U_2$. Állítsuk elő a $v = (\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3})$ vektort $v_1 + v_2$ alakban, ahol $v_1 \in U_1$ és $v_2 \in U_2$.

3. Legyenek a $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ lineáris transzformációk a következőképpen definiálva ($a,b,c \in \mathbb{R}$):

$$\varphi_1(a,b,c) = (a+b, b+c, c+a),$$
$$\varphi_2(a,b,c) = (a-b, b-c, 0),$$
$$\varphi_3(a,b,c) = (-b, a, c),$$
$$\varphi_4(a,b,c) = (a, b, b).$$

(a) Határozza meg a $\mathrm{Ker}\,(\varphi_i)$ és $\mathrm{Im}\,(\varphi_i)$ altereket ($i = 1,2,3,4$).

(b) Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(\varphi_i) \oplus \mathrm{Im}\,(\varphi_i)$ teljesül tetszőleges $i \in \{1,2,3,4\}$-re?

(c) Igaz-e, hogy $\mathrm{Im}\,(\varphi_2)$ φ_3-invariáns? Igaz-e, hogy $\mathrm{Ker}\,(\varphi_2)$ φ_3-invariáns?

(d) Határozzuk meg a $\varphi_3 \circ \varphi_4$ és $\varphi_4 \circ \varphi_3$ lineáris transzformációk kép- és magterét.

Kötelező házi feladat(ok)

1. Van-e olyan $u \in \mathbb{R}^4$ vektor, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortér direkt összege az $U = [(0,0,1,0),(1,0,0,0),u]$ és $V = [(1,0,0,1), 2\cdot u]$ altereinek?

2. Határozza meg a

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (a,b,c) \mapsto (a+b, -c, a-b)$$

lineáris transzformáció azon sajátaltereit, amelyek tartalmazzák az $(1,1,0)$ vektort.

Szorgami feladat(ok)

1. Direkt összege-e az $\mathbb{R}^4$ vektrotér az U és V altereinek?

(a) $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+b+c+d = a+b+c = 2c-d = 0\}$,
$V = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a-b+c+d = -a+b+2c+2d = 0\}$;

(b) $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+b+2c+d = -a+b+c+2d = 0\}$,
$V = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+b-c+d = a+3b+2c+4d = 0\}$.

2. Adjuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortérben az U, V és W altereket úgy, hogy

(i) $U + V + W = \mathbb{R}^4$,

(ii) $U \cap V = V \cap W = W \cap U = \{\mathbf{0}\}$,

(iii) $\mathbb{R}^4$ nem direkt összege az U, V és W altereknek.

3. Legyen V véges dimenziós vektortér és $t \in \mathcal{L}(V)$.

(a) Mutassuk meg, hogy $V \supseteq \operatorname{Im}\left(t^k\right) \supseteq \operatorname{Im}\left(t^{k+1}\right)$ és $\{\mathbf{0}\} \subseteq \operatorname{Ker}\left(t^k\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(t^{k+1}\right)$ teljesül tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re.

(b) Igazolja, hogy van olyan p természetes szám, hogy $\operatorname{Im}\left(t^p\right) \supseteq \operatorname{Im}\left(t^{p+1}\right)$, valamint ekkor az is igaz, hogy $\operatorname{Im}\left(t^p\right) = \operatorname{Im}\left(t^{p+k}\right)$ és $\operatorname{Ker}\left(t^p\right) = \operatorname{Ker}\left(t^{p+k}\right)$ $(k \in \mathbb{N})$.

(c) Bizonyítsa be, hogy a t-invariáns $\operatorname{Im}\left(t^p\right)$ és $\operatorname{Ker}\left(t^p\right)$ alterekre $V = \operatorname{Im}\left(t^p\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(t^p\right)$ teljesül.
