Ismétlő feladatok

1. Lineárisan függetlenek-e az u, v és w vektorok a K test feletti V vektortérben?

(a) $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (3, 1, 1)$ és $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$;

(b) $u = (\overline{1}, \overline{1}, \overline{1})$, $v = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{1})$, $w = (\overline{3}, \overline{1}, \overline{1})$ és $K = \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{Z}_2^3$;

(c) $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$, $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin 3x$, $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin^3 x$ és $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Mutassa meg, hogy az $\mathcal{F} = \{(1, 1, 0, 0), (-1, -1, 1, 2), (1, -1, 1, 3), (0, 1, -1, -3)\}$ vektorrendszer bázisa az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^4$ vektortérnek, majd határozza meg az $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátasorát az $\mathcal{F}$ bázisban.

3. Legyen $\mathcal{E} = \{(\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{3}), (\overline{2}, \overline{4}, \overline{1}, \overline{1})\}$. Kiegészíthető-e $\mathcal{E}$ a $\mathbb{Z}_5^4$, illetve a $\mathbb{Z}_7^4$ vektortér bázisává?

4. Határozza meg az

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} & \overline{0} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{6} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{5} & \overline{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{4\times 5}$$

mátrix rangját.

5. Legyen a $\varphi\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ lineáris transzformáció mátrixa az

$$\mathcal{F} = \{(\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{2}, \overline{1})\}$$

bázisban

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}.$$

Határozza meg $(\overline{4}, \overline{3}, \overline{2})\varphi$-t.

6. Adja meg a

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2,\ (x, y, z) \mapsto (\overline{4}x + \overline{2}y + \overline{3}z, x + y + \overline{5}z)$$

lineáris leképezés mátrixát az

$$\mathcal{E} = \{(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}), (\overline{1}, \overline{3}, \overline{0})\},$$
$$\mathcal{F} = \{(\overline{2}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{3})\}$$

bázisokban.

7. Határozza meg az M mátrix sajátértékeit a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ testek felett.

(a) $M \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$;

(b) $M \in \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 13 & 19 \\ -3 & -16 & -26 \\ 2 & 10 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 1 & 13 \\ 13 & 0 & -18 \\ -8 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ -10 & -9 & -5 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Legyen φ olyan lineáris transzformáció, amelynek mátrixa a standard bázisban M. Adjunk meg bázist φ sajátaltereiben, valamint döntsük el, hogy M diagonalizálható-e $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ felett.

8. Határozza meg az alábbi valós kvadratikus alakok kanonikus alakját.

(a) $x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2$;

(b) $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2$;

(c) $x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$.