SZÁLLÍTÁSI ÉS HOZZÁRENDELÉSI FELADAT

2009/2010. tavaszi félév

I. Szállítási feladat

Operációkutatás 2009/2010. tavaszi félév

A szállítási feladat megfogalmazása

Adott m számú telephely, melyeken valamilyen homogén és tetszés szerint osztható anyag vagy árucikk $a_1, \dots, a_m$ mennyiségei találhatók, valamint adott n számú felvevőhely, amelyek rendre $b_1, \dots, b_n$ mennyiségeket igényelnek. Feltesszük, hogy a szállítási költség bármely viszonylatban az elszállítandó mennyiséggel arányos, vagyis, ha $x_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ az i-edik telephelyről a j-edik felvevőhelyre elszállítandó mennyiség, és az i-edik telephelyről a j-edik felvevőhelyre egy egység szállítási költsége $c_{i,j}$, akkor az összes szállítási költség:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j}. \tag{1}$$

Azt is feltesszük, hogy egyik viszonylatban sincs korlátozva a szállítási kapacitás, valamint $a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n$. Célunk olyan szállítási terv megadása, amely eleget tesz a felvevőhelyek igényeinek és a költsége minimális.

A feladat matematikailag a következőképpen fogalmazható meg. Adott a

$$C = (c_{i,j})_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

mátrix, ahol $c_{i,j}$ az egységnyi anyagmennyiségnek a szállításai költsége, ha a szállítás az i-edik telephelyről a j-edik felvevőhelyre történik $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, a C mátrix a szállítási feladat **költségmátrixa**. Adottak továbbá

$$a_1, \dots, a_m \geqslant 0, \qquad b_1, \dots, b_n \geqslant 0$$

valós számok. Keressük az (1) kifejezés minimumát, feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} &= a_i \quad (1 \leqslant i \leqslant m), \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} &= b_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \\ x_{i,j} &\geqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n). \end{aligned}$$

A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy kitöltendő egy $(m \times n)$-es tábla nemnegatív valós számokkal úgy, hogy

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\cdots$	$x_{1,n}$	a_1
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\cdots$	$x_{2,n}$	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$\cdots$	$x_{m,n}$	a_m
b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

az egyes sorokban az elemek összege megegyezzen a tábla jobb oldalán, az egyes oszlopokban az elemek összege megegyezzen a tábla alján álló megfelelő a_i, illetve b_j számokkal, és az (1) kifejezés értéke minimális legyen.

A szállítási feladat speciális lineáris programozási feladat. Legyen

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T &= (x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n}, \ldots, x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in \mathbb{R}^{mn}_{\geqslant 0},\\
\mathbf{c}^T &= (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n}, c_{2,1}, \ldots, c_{2,n}, \ldots, c_{m,1}, \ldots, c_{m,n}) \in \mathbb{R}^{mn},\\
\mathbf{b}^T &= (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{m+n}_{\geqslant 0},
\end{aligned}$$

valamint

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \ldots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & \ldots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \ldots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \ldots & \mathbf{1}^T \\ E_n & E_n & E_n & \ldots & E_n \end{pmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1},$$

és E_n az $(n \times n)$-es egységmátrix. Ekkor a feladat így írható:

$$\begin{array}{rl} A \cdot \mathbf{x} & = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geqslant \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to \min \end{array} \tag{2}$$

Az $A \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(mn)}$ mátrix oszlopvektorait jelölje rendre

$$\mathbf{a}_{1,1}, \ldots, \mathbf{a}_{1,n}, \mathbf{a}_{2,1}, \ldots, \mathbf{a}_{2,n}, \ldots, \mathbf{a}_{m,1}, \ldots, \mathbf{a}_{m,n}.$$

Az A mátrixból azonnal leolvasható, hogy

$$\mathbf{a}_{i,j} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{m+j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n),$$

ahol $\mathbf{e}_k$ a k-adik $(m+n)$-dimenziós egységvektor $(1 \leqslant k \leqslant m+n)$.

1. Tétel. *Legyen* $L = \{\mathbf{x}^T \in \mathbb{R}^{mn} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$. *Ekkor L egy nem üres, korlátos, konvex poliéder $\mathbb{R}^{mn}$-ben.*

Bizonyítás. Mivel L a (2) lineáris programozási feladat lehetséges megoldásainak halmaza, ezért L konvex poliéder. Az, hogy a lehetséges megoldások L halmaza nem üres, könnyen adódik, ugyanis az

$$y_{i,j} = \frac{a_i b_j}{a_1 + \cdots + a_m} \quad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

számok nem-negatívak és $\mathbf{y}^T = (y_{1,1}, \ldots, y_{1,n}, y_{2,1}, \ldots, y_{2,n}, \ldots, y_{m,1}, \ldots, y_{m,n}) \in L$. Mivel

$$0 \leqslant x_{i,j} \leqslant \min(a_i, b_j)$$

teljesül minden i, j-re ($1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m$), ezért L korlátos. Q.E.D.

Az A mátrix tulajdonságai

2. Tétel. *Az A mátrix rangja $m+n-1$.*

Azt mondjuk, hogy az $M \in \mathbb{R}^{s \times t}$ mátrix **unimodális**, ha bármely aldeterminánsa -1, 0 vagy 1.

3. Tétel. *Az A mátrix unimodális.*

4. Tétel. *Legyen B az A mátrix $m+n-1$ darab lineáris független oszlopából alkotott $(m+n)\times(m+n-1)$-es mátrix. Ekkor B bármely sorát elhagyva nem-szinguláris mátrixot kapunk.*

A 2. Tétel szerint a szállítási feladat esetén minden bázis $m+n-1$ vektorból áll. A 4. Tétel más megfogalmazásban azt mondja ki, hogy ha az A mátrix $m+n-1$ oszlopából alkotott mátrixnak van egy $(m+n-1)\times(m+n-1)$-es nem-szinguláris része, akkor minden $(m+n-1)\times(m+n-1)$-es része nem-szinguláris.

Cellagráfok

A szállítási tábla egy $m \times n$-es tábla, amelyet használhatunk arra a célra, hogy beírjuk a $c_{i,j}$ vagy az $x_{i,j}$ számokat a megfelelő pozíciókba, cellákba. Egy harmadik felhasználási módja a szállítási táblának, hogy az $\mathbf{a}_{i,j}$ vektorok és a cellák között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítve:

$$\mathbf{a}_{i,j} \leftrightsquigarrow (i,j),$$

a cellák geometriai elhelyezkedése és a megfelelő oszlopvektorok lineáris kombinációi között párhuzamot vonjunk.

Az $m{\cdot}n$ darab cellát tartalmazó cellahalmazból válasszunk ki egy részhalmazt. Kössük össze vízszintes vonalakkal az összes egy sorban álló cellapárokat, és függőleges vonalakkal az összes egy oszlopban álló cellapárokat. A kapott elrendezést **cellagráfnak** nevezzük. A cellagráf a kiválasztott cellarendszerrel egyértelműen adott.

Minden cellagráfnak, illetve minden cellarendszernek megfeleltethetünk egy páros gráfot a következő módon. Legyen $\mathcal{G}$ az a páros gráf, melynek csúcshalmaza

$$V(\mathcal{G}) = \{1, \ldots, m\} \cup \{1^*, \ldots, n^*\},$$

és

$$E(\mathcal{G}) = \{(i, j^*) : (i,j) \text{ eleme a cellarendszernek}\}.$$

Ekkor olyan páros gráfot kapunk, amelyből a cellarendszer egyértelműen rekonstruálható.

Egy cellagráffal kapcsolatban a cellákat **csúcsoknak**, az egy sorban vagy oszlopban álló cellapárokat összekötő vonalakat pedig **éleknek** nevezzük. A két cella, melyeket az él összeköt, az él két végpontja.

Egy cellagráf egymáshoz csatlakozó éleinek egy rendszerét **útnak** nevezzük, ha minden él minden végpontjából legfeljebb két él indul ki, és a szomszédos élek merőlegesek egymásra. Az út végein lévő csúcsokat (cellákat) az út **végpontjainak** nevezzük. Ha egy út minden sorból és oszlopból legfeljebb két cellán megy át, akkor az utat **egyszerű útnak** nevezzük.

Ha egy út végpontjai egybeesnek, akkor az utat **körnek** nevezzük. Egy kör **egyszerű**, ha mint út egyszerű.

Egy cellagráfot **összefüggőnek** nevezünk, ha az $m \times n$-es tábla minden sora és minden oszlopa tartalmaz csúcsot a cellagráfból és a cellagráf bármely két csúcsa összeköthető úttal. Egy cellagráfot **fának** nevezünk, ha összefüggő és körmentes.

5. Tétel. *Legyenek $c_1, \ldots, c_k$ egy cellagráf cellái, valamint $e_1, \ldots, e_k$ ezen celláknak megfelelő élek rendszere a cellagráfhoz tartozó páros gráfban. Ekkor a*

$$(c_1, c_2), (c_2, c_3), \ldots, (c_{k-1}, c_k)$$

élek rendszere a cellagráfban pontosan akkor út/egyszerű út/kör/egyszerű kör, ha az

$$e_1, e_2, \ldots, e_k$$

élrendszer a páros gráfban út/egyszerű út/kör/egyszerű kör. A cellagráf pontosan akkor összefüggő, ha a megfelelő páros gráf összefüggő. A cellagráf pontosan akkor alkot fát, ha a megfelelő páros gráf is fa.

6. Tétel. *Ha egy cellagráf μ útja/köre nem egyszerű, akkor van olyan μ' egyszerű út/kör, amelynek végpontjai megegyeznek μ végpontjaival, és $V(\mu') \subseteq V(\mu)$.*

7. Tétel. *Tetszőleges $\mathfrak{G}$ cellagráfra az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *A $\mathfrak{G}$ cellagráf fa.*

(ii) *A $\mathfrak{G}$ cellagráf $m + n - 1$ cellát tartalmaz és körmentes.*

8. Tétel. *Ha egy cellagráf fa, akkor az $m \times n$-es tábla azon sorainak és oszlopainak száma, amelyek a cellagráfból csak egy cellát tartalmaznak legalább kettő.*

9. Tétel. *Legyen a $\mathfrak{G}$ cellagráf fa és c olyan cella, amelyre $c \notin V(\mathfrak{G})$ teljesül. Ekkor van olyan κ egyszerű kör, amelyre $c \in V(\kappa)$ és $V(\kappa) \setminus \{c\} \subseteq V(\mathfrak{G})$ teljesül. Ez az egyszerű kör egyértelmű.*

A mátrix oszlopvektorai kapcsolatának geometriai értelmezése

10. Tétel. *Ha a $c_1, \ldots, c_k$ cellák sorozatában a szomszédosakat összekötő élek kört alkotnak, akkor az egyes celláknak megfelelő oszlopvektorok alternáló összege a nullvektor.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy a c_1 és c_2 cellák egy sorban vannak. Ekkor a cellák indexei az alábbi alakúak:

$$(s_1, o_1), (s_1, o_2), (s_2, o_2), (s_2, o_3), \ldots, (s_{k-1}, o_k),$$

ahol $o_k = o_1$. Így a megfelelő oszlopvektorok alternáló összege:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_{s_1, o_1} - \mathbf{a}_{s_1, o_2} + \mathbf{a}_{s_2, o_2} - \mathbf{a}_{s_2, o_3} \pm \cdots - \mathbf{a}_{s_{k-1}, o_k} \\ &\qquad = (\mathbf{e}_{s_1} + \mathbf{e}_{m+o_1}) - (\mathbf{e}_{s_1} + \mathbf{e}_{m+o_2}) + (\mathbf{e}_{s_2} + \mathbf{e}_{m+o_2}) \\ &\qquad - (\mathbf{e}_{s_2} + \mathbf{e}_{m+o_3}) \pm \cdots - (\mathbf{e}_{s_{k-1}} + \mathbf{e}_{m+o_k}). \end{aligned}$$

Ez utóbbi összeg pedig $\mathbf{0}$, mivel k páros és $o_k = o_1$. Q.E.D.

11. Tétel. *Legyen $H \subseteq \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$. Ekkor az $\mathbf{a}_{i,j}$ $(i,j) \in H$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a vektoroknak megfelelő cellákhoz tartozó cellagráf körmentes.*

Bizonyítás. Ha a vektorokhoz tartozó cellagráfban van kör, akkor a 10. Tétel szerint a körbeli cellákhoz tartozó vektorok nem lineárisan függetlenek, így az egész vektorrendszer sem lehet az.

Tegyük most fel, hogy vektorrendszerünk nem lineárisan független. Ekkor valamelyik vektor (pl. $\mathbf{a}_{i_0,j_0}$) kifejezhető a többiek lineáris kombinációjaként. A lineáris kombináció megalkotásánál elegendő csak a lineáris független vektorokra szorítkozni, melyek indexhalmazát (a megfelelő cellarendszert) jelölje H_1. Egészítsuk ki a $\mathbf{a}_{i,j}$ $(i,j) \in H$ vektorrendszert bázissá, jelölje a hozzávett kiegészítő vektorok indexhalmazát K. Ekkor

$$\mathbf{a}_{i_0,j_0} = \sum_{(i,j)\in H_1} d_{i,j} \cdot \mathbf{a}_{i,j} + \sum_{(k,l)\in K} 0 \cdot \mathbf{a}_{i,j}. \tag{3}$$

Mivel a $H_1 \cup K$ indexekhez tartozó cellagráf fa és $(i_0,\, j_0) \notin H_1 \cup K$, ezért van pontosan egy olyan kör, amely áthalad az $(i_0,\, j_0)$ cellán és a többi csúcsa $H_1 \cup K$-ban van. Így a (3) felírás egyértelműsége miatt a kör minden csúcsának indexe $H_1 \cup \{(i_0,\, j_0)\}$-ban van. Azaz a vektoroknak megfelelő cellákhoz tartozó cellagráf nem körmentes. Q.E.D.

12. Tétel. *Legyen $H \subseteq \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$. Ekkor az $\mathbf{a}_{i,j}$ $(i,j) \in H$ vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha a vektoroknak megfelelő cellákhoz tartozó cellagráf fa.*

A szimplex algoritmus alkalmazása a szállítási feladatra

Tegyük fel, hogy ismerünk egy B megengedett bázist. Első lépésként előállítjuk az $\mathbf{a}_{i,j}$ vektorokat a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Jelölje I_B a bázisvektorokhoz tartozó cellák indexeit. Ekkor

$$\mathbf{a}_{i\,j} = \sum_{(k,l)\in I_B} d_{kl,\,ij} \cdot \mathbf{a}_{k,\,l}.$$

Ezen előállítás olyan (i,j) cellák esetén triviális, amelyek I_B-ben vannak. Ha $(i,j) \notin I_B$, akkor van olyan az (i,j) cellán áthaladó kör, amelynek (i,j)-n kívüli cellái báziscellák:

$$(i_1,j_1),(i_1,j_2),(i_2,j_2),(i_2,j_3),\dots,(i_{k-1},j_k),$$

ahol $i_1 = i$ és $j_k = j_1 = j$. Ekkor

$$\mathbf{a}_{i_1,j_1} - \mathbf{a}_{i_1,j_2} + \mathbf{a}_{i_2,j_2} - \mathbf{a}_{i_2,j_3} \pm \cdots - \mathbf{a}_{i_{k-1},j_k} = \mathbf{0}$$

következtében

$$\mathbf{a}_{i,j} = \mathbf{a}_{i_1,j_2} - \mathbf{a}_{i_2,j_2} + \mathbf{a}_{i_2,j_3} \mp \cdots + \mathbf{a}_{i_{k-1},j_k}.$$

Azaz $d_{kl,\,ij} \in \{-1,0,1\}$.

Legyen

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= \sum_{(k,l)\in I_B} d_{kl,\,ij} \cdot c_{k,\,l} \\ &= c_{i_1,j_2} - c_{i_2,j_2} + c_{i_2,j_3} \mp \cdots + c_{i_{k-1},j_k}, \end{aligned}$$

ekkor $z_{i,j} - c_{i,j} = c_{i_1,j_2} - c_{i_2,j_2} + c_{i_2,j_3} \mp \cdots + c_{i_{k-1},j_k} - c_{i_k,j_k}$, ahol $i_k = i$.

Ekkor a következő két eset lehetséges:

(a) $z_{i,j} - c_{i,j} \leqslant 0$ minden i, j-re ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$), ekkor a kapott lehetséges megoldás optimális.

(b) van olyan (i, j), hogy $z_{i,j} - c_{i,j} > 0$. Ekkor a $B_0 = B$ bázisról áttérünk egy B_1 bázisra, amely B_0-tól egyetlen vektorban különbözik. Másképpen kifejezve, az I_B báziscella-rendszerről áttérünk egy I_{B_1} báziscella-rendszerre, miközben a régiből elhagyunk egyet és helyette bevesszük az (i, j) cellát.