

HOZZÁRENDELÉSI FELADAT

Probléma: Adott n dolgozó és ugyanennyi munka. Az egyes dolgozók a munkákat különböző költséggel tudják elvégezni. Osszuk szét a munkákat a dolgozók között úgy, hogy minden dolgozó pontosan egy munkát kapjon és a munkavégzés költsége minimális legyen.

Jelölések:

- $n \in \mathbb{N}$ (a dolgozók és a munkák száma),
- $C = (c_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ahol c_{ij} a j -edik munka költsége, ha az i -edik dolgozó hajtja végre ($1 \leq i, j \leq n$), a C mátrix a **költségmátrix**,
- $X = (x_{ij})_{n \times n} \in \{0, 1\}^{n \times n}$, ahol $x_{ij} = 1$ pontosan akkor teljesül, ha a j -edik munkát az i -edik dolgozó végzi el ($1 \leq i, j \leq n$).

Ekkor a fenti probléma a következőképpen formalizálható:

$$\begin{array}{l} \sum_{t=1}^n x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ \sum_{t=1}^n x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ \hline \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \end{array}$$

A fenti feladat a C költségmátrixú hozzárendelési feladat, amelyet $H(C)$ -vel jelölünk.

1. Legyen $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg a $H(C)$ hozzárendelési feladat megoldását.

2. Legyenek C és D tetszőleges $\mathbb{R}^{m \times n}$ -beli mátrixok. Azt mondjuk, hogy $C = (c_{ij})$ és $D = (d_{ij})$ ekvivalensek (jel.: $C \sim D$), ha vannak olyan α_i, β_j valós számok, amelyekre $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ teljesül minden (i, j) indexpárra ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$). Mutassuk meg, hogy \sim ekvivalenciareláció.

3. Ha a $C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok hasonlóak, akkor a $H(C)$ és $H(D)$ hozzárendelési feladatok optimális megoldásai megegyeznek.

4. Legyen $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Tegyük fel, hogy előállítottunk egy olyan $C^{(0)}, \dots, C^{(k)}$ ($k < n$) mátrixsorozatot, amely az alábbi tulajdonságokkal bír:

(1) $C \sim C^{(0)}$,

$$(2) C^{(t)} \sim C^{(t+1)} \quad (t = 0, \dots, k-1),$$

$$(3) C^{(t)} \geq 0 \quad (t = 0, \dots, k),$$

(4) $C^{(k)}$ -ban ki van jelölve egy n -elemű független 0-rendszer.

Legyen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } C_{ij}^{(k)} \text{ eleme a független 0-rendszernek,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $X \in \{0, 1\}^{n \times n}$ optimális megoldása $H(C)$ -nek.

5. Határozzuk meg az alábbi $C \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mátrixban kijelölhető összes független 0-rendszert:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Határozzuk meg a $H(C)$ hozzárendelési feladat optimális megoldását, ahol

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Határozzuk meg a $H(C)$ hozzárendelési feladat optimális megoldását, ahol

$$C \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right\}.$$