Szimplex módszer

1. Oldja meg az alábbi feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ & & & & & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2,3,4) \\ \hline 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \to & \min \end{array}$$

2. Oldja meg az alábbi feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 5x_2 & & & = & 4 \\ & & & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2,3) \\ \hline -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \to & \min \end{array}$$

3. Oldja meg az alábbi feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 6 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 5 \\ & & & & & & & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,\ldots,5) \\ \hline -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & \to & \min \end{array}$$

4. Vezesse vissza az alábbi lineáris programozási feladatot alkalmas standard feladatra, és oldja meg a kapott feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & \geqslant & 1 \\ x_1 & + & x_2 & \leqslant & 3 \\ x_1 & - & x_2 & \geqslant & -1 \\ & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2) \\ \hline -x_1 & + & x_2 & \to & \min \end{array}$$

5. Vezesse vissza az alábbi lineáris programozási feladatot alkalmas standard feladatra, és oldja meg a kapott feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\
3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & \leqslant & 15 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geqslant & 3 \\
-x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leqslant & -1 \\
 & & & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2,3) \\
\hline
-x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \to & \max
\end{array}$$

Konvex poliéderek

6. Igazoljuk, hogy az $A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ feltételeket kielégítő vektorok halmaza zárt és konvex.

7. Legyen K az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok által generált konvex kúp.[1] Igazolja a következőket:

(a) a K halmaz konvex;

(b) $\mathbf{0} \in K$;

(c) ha $\mathbf{a} \in K$, akkor tetszőleges $\lambda \geqslant 0$ valós számra $\lambda\mathbf{a} \in K$;

(b) $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \subseteq K$.

Dualitás

8. Az alábbi primál feladathoz konstruáljuk meg a duális feladatot. Rendre ábrázoljuk az egyes egyenlőtlenségeket kielégítő ponthalmazokat, és ezek segítségével határozzuk meg mindkét feladat lehetséges megoldásainak halmazát. Ezek ismeretében határozzuk meg az optimális megoldásokat, és vessük össze az optimumértékeket.

$$\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 3 \\
4x_1 & + & 7x_2 & \leqslant & 7 \\
 & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2) \\
\hline
3x_1 & + & 2x_2 & \to & \max
\end{array}$$

9. Határozzuk meg az alábbi primál feladat optimumát és optimális megoldását a duál feladat segítségével:

$$\begin{array}{rcrcl}
3x_1 & + & x_2 & \leqslant & 3 \\
x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 3 \\
2x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 15 \\
 & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2) \\
\hline
x_1 & + & x_2 & \to & \max
\end{array}$$

[1] Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok által generált konvex kúpnak nevezzük az $\mathbb{R}^n$ vektortér $\{\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0\}$ részhalmazát.

10. Oldjuk meg duális szimplex algoritmus alkalmazásával az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & \geqslant & 0 \\
6x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geqslant & 4 \\
7x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \leqslant & 10 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & \geqslant & 3 \\
4x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & \geqslant & 2 \\
 & & & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2,3) \\
\hline
3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \to & \min
\end{array}$$

11. Oldjuk meg duális szimplex algoritmus alkalmazásával az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{ccrcrcrcrcl}
y_1 & & & - & x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & -2 \\
 & & y_2 & - & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\
 & & & & & & & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2,3) \\
 & & & & & & & & y_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2) \\
\hline
 & & & & 5x_1 & & & + & 21x_3 & \to & \min
\end{array}$$

12. Oldjuk meg duális szimplex algoritmus alkalmazásával az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geqslant & 2 \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geqslant & 4 \\
 & & & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2,3) \\
\hline
3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \to & \min
\end{array}$$

13. Oldjuk meg duális szimplex algoritmus alkalmazásával az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{ccccrcrcrcrcl}
y_1 & & & + & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 \\
 & y_2 & & - & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\
 & & y_3 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -4 \\
 & & & & & & & & & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2,3,4) \\
 & & & & & & & & & & y_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2,3) \\
\hline
 & & & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \to & \min
\end{array}$$

14. Konstruáljunk olyan primál-duál feladatpárt, melyben a primál feladatnak egy, a duál feladatnak végtelen sok optimális megoldása van.

15. Konstruáljunk olyan primál-duál feladatpárt, hogy egyiknek se legyen megoldása.

16. Oldjuk meg a következő feladatot:

$$\begin{array}{rcrcl}
x_1x_2 & - & 2x_2^2 & \geqslant & 1 \\
x_1^2 & + & x_2^2 & \geqslant & 10 \\
\hline
x_1 & & & \to & \max
\end{array}$$

17. Legyen $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ olyan $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli mátrix, amelyre minden $1 \leqslant j \leqslant n$ esetén $\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| < 1$. Mutassuk meg, hogy $E - A$ invertálható.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha a

$$\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \leqslant b$$

lineáris egyenlőtlenség következménye a

$$\mathbf{g}_i^T \cdot \mathbf{x} \leqslant b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

lineáris egyenlőtlenségeknek, akkor vannak olyan $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ valós számok, amelyekre

$$b - \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - \mathbf{g}_i^T \cdot \mathbf{x})$$

teljesül.

19. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz és $f\colon X \to \mathbb{R}$ tetszőleges leképezés. Azt mondjuk, hogy az f leképezés *kvázikonvex*, ha bármely $x_1, x_2 \in X$ és tetszőleges $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén

$$f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \leqslant \max(f(x_1), f(x_2)).$$

Mutassunk példát kvázikonvex, de nem konvex leképezésre.

20. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és $f\colon D \to \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos leképezés. Bizonyítsuk be, hogy bármely $x_1, x_2 \in D$ esetén

$$f\left(\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2),$$

akkor bármely $x_1, x_2 \in D$ és $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén

$$f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

is teljesül.