Szimplex algoritmus

1. Határozza meg az alábbi lineáris programozási feladatokhoz rendre azokat a standard feladatokat, amelyekre az illető lineáris programozási feladatok visszavezethetők.

(a)

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & \geqslant & -3 \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leqslant & 8 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\
x_1 & & & & & \geqslant & 0 \\
\hline
3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & \to & \max
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
4x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & \geqslant & 7 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leqslant & 8 \\
-5x_1 & + & x_2 & & & = & -2 \\
x_1 & & & & & \leqslant & 0 \\
 & & x_2 & & & \geqslant & 0 \\
\hline
-2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & \to & \min
\end{array}
$$

2. Mutassa meg, hogy a

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x & - & y & = & 0 \\
x & + & y & = & 1 \\
x & & & \geqslant & 0 \\
 & & y & \geqslant & 0 \\
\hline
5x & + & 4y & \to & \min
\end{array}
\quad \text{és} \quad
\begin{array}{rcrcl}
-x & + & 2y & = & 1 \\
-3x & + & 3y & = & 1 \\
x & & & \geqslant & 0 \\
 & & y & \geqslant & 0 \\
\hline
-x & + & 7y & \to & \min
\end{array}
$$

standard feladatok ekvivalensek.

3. Konstruáljon az alábbi lineáris programozási feladatokhoz olyan lehetséges kanonikus alakú feladatokat, amelyekre az illető lineáris programozási feladatok visszavezethetők. Adja meg a feladatok szimplex táblázatát, és oldja meg szimplex algoritmussal ezen feladatokat.

(a)

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 7 \\
3x_1 & - & x_2 & \leqslant & 11 \\
 & & x_2 & \leqslant & 4 \\
 & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2) \\
\hline
-x_1 & - & x_2 & \to & \min
\end{array}
$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcl}
4x_1 & + & 3x_2 & - & 11x_3 & \leqslant & 10 \\
2x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & \leqslant & 4 \\
5x_1 & - & 2x_2 & + & 8x_3 & \leqslant & 2 \\
 & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i = 1, 2, 3) \\
\hline
3x_1 & - & 5x_2 & - & 8x_3 & \to & \min
\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & \leqslant & 4 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \leqslant & 8 \\
-2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leqslant & 6 \\
x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leqslant & 10 \\
 & & & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i = 1, 2, 3, 4) \\
\hline
-3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \to & \min
\end{array}$$

4. Hajtsa végre a szimplex algoritmust az alábbi szimplex táblázaton.

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	-2	-9	1	9	0
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-2	0
x_3	1	1	1	1	1
	-2	-3	1	12	0

5. Oldja meg szimplex algoritmussal a következő feladatot.

	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	
x_1	1	1	1	1	1	2	2	1	4
x_2	1	2	2	1	1	2	1	1	6
x_3	2	1	-2	2	2	1	3	1	5
	1	2	-5	1	-6	1	-6	8	0

6. Egy üzemben négyféle terméket állítanak elő 3-féle nyersanyag felhasználásával. A nyersanyagokból az egyes termékek előállításához rendre 1, 0, 1; 1, 1, 1; 0, 1, 1, illetve 1; 1; 0 egységnyit használnak fel. Az egyes nyersanyagokból rendre maximálisan 90, 80, illetve 50 egységnyi áll rendelkezésre. A termékek eladási egységárai 2, 3, 2, illetve 2 USD. Határozzuk meg az optimális termelési programot.

7. Négy termék (α, β, γ, δ) gyártásához három erőforrást (A, B, C) használnak fel a következő technológiai mátrix szerint:

	α	β	γ	δ
A	1	0	2	3
B	3	1	1	0
C	0	2	1	2

A erőforrások kapacitásai rendre: 100, 150 és 200, amelyek közül az első felső korlát, a másodikat teljesen, a harmadikból legalább 200-at fel kell használni. A termékek egységárai rendre 2, 3, 4, illetve 4 CHF. Cél a maximális árbevétel. Írjuk fel a feladat matematikai modelljét és az ahhoz tartozó kanonikus alakot. Határozzuk meg a maximális árbevételt.

Változatok a szimplex algoritmusra

$\rightarrow$ *Lexikografikus szimplex algoritmus*: ha

$$\min\{b_r/a_{r\,j} : a_{r\,j} > 0,\ 1 \leqslant r \leqslant n\} = b_{k_1}/a_{k_1\,j} = \cdots = b_{k_s}/a_{k_s\,j},$$

akkor tekintsük a

$$\mathbf{h}_{k_t} = (b_{k_t}, a_{k_t\,1}, \ldots, a_{k_t\,n+m})/a_{k_t\,j} \quad (t = 1, \ldots, s)$$

vektorokat, és legyen $\mathbf{h}_k = \operatorname{lexmin}\{\mathbf{h}_{k_1}, \ldots, \mathbf{h}_{k_s}\}$. Válasszuk az $a_{k\,j}$ elemet generáló elemnek.

8. Rendezze lexikografikusan az alábbi vektorokat:

$$(3,4,2,1,0),\quad (2,1,-1,0,4),\quad (3,4,1,-2,0),$$
$$(2,1,-1,0,5),\quad (3,4,-2,3,4),\quad (2,1,-1,0,0).$$

9. Adjon meg n-dimenziós vektoroknak olyan végtelen halmazát, amelynek nem létezik lexikografikus minimuma.

10. Mutassa meg, hogy az alábbi feladat nem oldható meg szimplex algoritmussal, majd oldja meg lexikografikus szimplex algoritmussal.

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1/4	−8	−1	9	0
x_2	1/2	−12	−1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	1
	−3/4	20	−1/2	6	0

11. Hajtsa végre a lexikografikus szimplex algoritmust az alábbi szimplex táblázaton.

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	−2	−9	1	9	0
x_2	1/3	1	−1/3	−2	0
x_3	1	1	1	1	1
	−2	−3	1	12	0

12. Oldja meg az alábbi feladatokat lexikografikus szimplex algoritmussal.

b. vált.	$\mathbf{b}^{(v)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	0	1	−2	−3	4
x_2	0	0	1	0	4	−3	−2	1
x_3	1	0	0	1	1	1	1	1
$v = 0$	0	0	0	0	−1	1	−1	1

b. vált.	$\mathbf{b}^{(v)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	0	2	−3	−5	6
x_2	0	0	1	0	6	−5	−3	2
x_3	1	0	0	1	3	1	2	4
$v = 0$	0	0	0	0	−1	1	−1	1

$\rightarrow$ *A legnagyobb csökkentés módszere*: minden iterációs lépésben, minden egyes $c_s < 0$ együtthatóra meghatározzuk a

$$\Delta_s = \min\{b_r/a_{r\,s} : a_{r\,s} > 0,\ 1 \leqslant r \leqslant n\}$$

mennyiséget. Ha ezek a minimumok rendre léteznek, akkor képezzük a

$$\Theta = \min\{c_s\Delta_s : c_s < 0,\ 1 \leqslant s \leqslant n+m\}$$

minimumot, és kiválasztjuk a legkisebb olyan j indexet, amelyre $\Theta = c_j\Delta_j$ teljesül. Ezt követően a c_j elem oszlopában választunk generáló elemet a szimplex algoritmusnak megfelelően.

13. Oldja meg a legnagyobb csökkentés módszerével az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{cccrcrcrcrcl}
x_1 & & & +6x_4 & + & 8x_5 & - & x_6 & + & x_7 & = & 4 \\
 & x_2 & & +2x_4 & + & 4x_5 & & & + & 2x_7 & = & 4 \\
 & & x_3 & -x_4 & & & + & x_6 & + & x_7 & = & 6 \\
 & & & & & & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i = 1, \ldots, 7) \\
\hline
 & & & -2x_4 & - & 4x_5 & - & x_6 & + & 3x_7 & \rightarrow & \min
\end{array}$$

14. Oldja meg a legnagyobb csökkentés módszerének lexikografikus változatával az alábbi feladatot.

b. vált.	$\mathbf{b}^{(v)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	0	2	−2	2	4	0
x_2	0	0	1	0	−1	2	−1	1	0
x_3	1	0	0	1	1	−1	1	3	1
$v = 0$	0	0	0	0	−2	1	−2	2	−3

$\rightarrow$ *A legmeredekebb csökkentés módszere*: minden iterációs lépésben, minden egyes $c_s < 0$ együtthatóra meghatározzuk a c_s/σ_s mennyiséget, ahol

$$\sigma_s = \sqrt{1 + a_{1\,s}^2 + \cdots + a_{n\,s}^2}.$$

Ezek után képezzük a

$$\Theta = \min\{c_s/\sigma_s : c_s < 0,\ 1 \leqslant s \leqslant n+m\}$$

minimumot, és kiválasztjuk a legkisebb olyan j indexet, amelyre $\Theta = c_j/\sigma_j$ teljesül. Ezt követően a c_j elem oszlopában választunk generáló elemet a szimplex algoritmusnak megfelelően.

15. Oldja meg a legmeredekebb csökkentés módszerével az alábbi feladatot.

	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	2	-1	2
x_2	1	2	1	6
x_3	2	3	3	8
	-4	-5	-3	0

$\to$ *P. Wolfe algoritmusa*:

1. lépés. A tekintett lehetséges kanonikus alakú feladat jobboldalán szereplő b_i $(i = 1, \ldots, n)$ mennyiségeket rendre helyettesítsük a $(b_i, 0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ elempárokkal.

2. lépés. Ha a feladat célfüggvénye nem tartalmaz negatív együtthatót, akkor vége az eljárásnak, a feladat bázismegoldása optimális megoldás. Ellenkező esetben a 3. lépés következik.

3. lépés. Vizsgáljuk meg rendre az egyenletrendszer jobboldalán szereplő (b_i, ν_i) $(i = 1, \ldots, n)$ elempárokat, és $b_i = 0$ esetén a (b_i, ν_i) párt helyettesítsük $(1, \nu_i + 1)$-gyel. Ezek után vegyük a negatív c_s-ek minimumát. Jelölje c_j a minimummal megegyező c_s-ek közül a legkisebb indexűt, és térjünk rá a 4. lépésre.

4. lépés. Képezzük a $\nu = \max\{\nu_t : 1 \leqslant t \leqslant n\}$ maximumot és határozzuk meg az $M = \{t : 1 \leqslant t \leqslant n,\ \nu = \nu_t\}$ halmazt, továbbá a

$$\Delta = \min\{b_r/a_{r\,j} : a_{r\,j} > 0,\ r \in M\}$$

értéket. Ha ez utóbbi minimum nem létezik és $\nu = 0$, akkor vége az eljárásnak, a célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán. Ha Δ nem létezik és $\nu > 0$, akkor az 5. lépéssel folytatódik az eljárás. Végül, ha Δ létezik és

$$\Delta = \frac{b_{k_1}}{a_{k_1\,j}} = \cdots = \frac{b_{k_s}}{a_{k_s\,j}},$$

akkor válasszük az $a_{k_t\,j}$ $(t = 1, \ldots, s)$ elemek közül a legkisebb sorindexűt generáló elemként. Jelölje a választott generáló elemet $a_{k\,j}$. Az $a_{i\,s}$ együtthatókon és a célfüggvényegyütthatókon a szimplex algoritmus szerinti átalakításokat hajtsuk végre, a (b_i, ν_i) $(i = 1, \ldots, n)$ elempárokon és az α konstanson pedig a következőket:

- ha $\nu_i < \nu_k\,(= \nu)$, akkor $(b'_i, \nu'_i) = (b_i, \nu_i)$,
- ha $\nu_i = \nu_k$ és $i \neq k$, akkor $(b'_i, \nu'_i) = (b_i - a_{i\,j} b_k/a_{k\,j}, \nu_i)$,
- $(b'_k, \nu'_k) = (b_k/a_{k\,j}, \nu_k)$,
- $\alpha' = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } \nu_k > 0, \\ \alpha - c_j b_k/a_{k\,j}, & \text{különben.} \end{cases}$

Az átlalkításokkal előállított új feladattal folytassuk az eljárást a 2. lépéssel.

5. lépés. Minden egyes $t \in M$ indexre a (b_t, ν_t) elempárt helyettesítsük $(0, \nu_t - 1)$-gyel, majd folytassuk az eljárást a 4. lépéssel.

16. Oldja meg a Wolf-féle eljárással az alábbi feladatot.

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	-2	-9	1	9	0
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-2	0
x_3	1	1	1	1	1
	-2	-3	1	12	0

$\rightarrow$ *R. G. Bland algoritmusa*:

1. lépés. Ha a feladat célfüggvénye nem tartalmaz negatív együtthatót, akkor vége az eljárásnak, a feladat bázismegoldása optimális megoldás. Ellenkező esetben a 2. lépés következik.

2. lépés. Vegyük a legkisebb indexű negatív célfüggvényegyütthatót, és jelölje ezt c_j. Ha $a_{r\,j} \leqslant 0$ $(r = 1, \dots, n)$, akkor vége az eljárásnak, a célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán. Ellenkező esetben a 3. lépés következik.

3. lépés. Ha $\min\{b_r/a_{r\,j} : a_{r\,j} > 0,\ 1 \leqslant r \leqslant n\} = b_{k_1}/a_{k_1\,j} = \cdots = b_{k_s}/a_{k_s\,j}$, akkor tekintsük rendre a k_1-edik, ..., k_s-edik egyenletben szereplő $x_{i_{k_1}}, \dots, x_{i_{k_s}}$ bázisváltozókat, és legyen $i_{k_v} = \min\{i_{k_r} : 1 \leqslant r \leqslant s\}$. Ezek után válasszuk $a_{k_v\,j}$-t generáló elemnek, majd hajtsuk végre a szimplex algoritmusban megadott átalakításokat. Az előállított feladattal folytassuk az eljárást az 1. lépésnél.

17. Oldja meg a Bland-féle eljárással az alábbi feladatot.

b. vált.	$\mathbf{b}^{(v)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	0	1	-2	-4	4
x_2	0	0	1	0	2	-2	-2	1
x_3	1	0	0	1	1	1	3	2
$v = 0$	0	0	0	0	-1	0	-1	1