
KLASSZIKUS ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

(1/2B.)

‘ZÁRTHELYI DOLGOZAT’

2009/2010. TAVASZI FÉLÉV

2010. március 10.

1. Az alábbi beszélgetés hangzott el egy nagypapa és unokája között:

- Hány éves vagy nagypapa? – kérdezte Vili bácsit unokája Misi.
- Azt én meg nem mondom, de azt elárulom, hogy életkorom kétszerese 9-cel osztva 7-et, háromszorosa 16-tal pedig 8-at ad maradékul. – felelte a nagypapa.

Ebből Misi már ki tudta találni, hogy hány éves a nagyapja. Vajon Ön is megtudja mondani Vili bácsi életkorát? (10 pont)

2. Legyen p páratlan prímszám. Határozza meg

- (a) $(p - 2)!$
- (b) $(p - 3)!$

maradékát p -vel osztva. (4 + 6 pont)

3. Szerdán pontosan délben Vili bácsi azt kérdezte Misi unokájától, hogy 1117^{2306} perc múlva vajon milyen nap lesz. Ön meg tudná mondani, hogy milyen nap lesz? A pontos időt is meg tudná mondani (percnyi pontossággal)? (10 pont)

4. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre $\varphi(n) = n/2$ teljesül? (10 pont)

5. Mutassa meg, hogy az $a = 5$ egész szám primitív gyök modulo 17, de nem primitív gyök modulo 19. (10 pont)

6. Az alábbi indextáblázat segítségével oldja meg az $5x^4 \equiv 2 \pmod{11}$ kongruenciát.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{ind}_{11,2} a$	0	1	8	2	4	9	7	3	6	5

(10 pont)

• Mely m természetes számok esetén alkotnak a

$$0 + 1 + 2 + \dots + (i - 1) \quad (i = 1, \dots, m)$$

egészek teljes maradérendszerét modulo m . (5 pont)

• Legyenek a és b olyan természetes számok, amelyek relatív prímek. Határozzuk meg, hogy milyen maradékot ad az $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)}$ egész szám ab -vel osztva. (5 pont)

Jó munkát kívánok!