Klasszikus Algebra és Számelmélet

(1/2a.) ‘Zárthelyi dolgozat’ 2009/2010. tavaszi félév

2010. március 10.

1. Az alábbi beszélgetés hangzott el egy nagypapa és unokája között:

– Hány éves vagy nagypapa? – kérdezte Vili bácsit unokája Misi.

– Azt én meg nem mondom, de azt elárulom, hogy életkorom kétszerese 9-cel osztva 7-et, háromszorosa 16-tal pedig 11-et ad maradékul. – felelte a nagypapa.

Ebből Misi már ki tudta találni, hogy hány éves a nagyapja. Vajon Ön is megtudja mondani Vili bácsi életkorát? (10 pont)

2. Legyen p páratlan prímszám. Határozza meg

(a) $(p-2)!$

(b) $(p-3)!$

maradékát p-vel osztva. (4 + 6 pont)

3. Kedden pontosan délben Vili bácsi azt kérdezte Misi unokájától, hogy 1111^{2306} perc múlva vajon milyen nap lesz. Ön meg tudná mondani, hogy milyen nap lesz? A pontos időt is meg tudná mondani (percnyi pontossággal)? (10 pont)

4. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre $\varphi(2n) = n$ teljesül? (10 pont)

5. Mutassa meg, hogy az $a = 2$ egész szám primitív gyök modulo 19, de nem primitív gyök modulo 17. (10 pont)

6. Az alábbi indextáblázat segítségével oldja meg a $3x^4 \equiv 1 \pmod{11}$ kongruenciát.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{ind}_{11,2}\, a$	0	1	8	2	4	9	7	3	6	5

(10 pont)

• Mely m természetes számok esetén alkotnak a

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (i-1) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

egészek teljes maradékrendszert modulo m. (5 pont)

• Legyenek a és b olyan természetes számok, amelyek relatív prímek. Határozzuk meg, hogy milyen maradékot ad az $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)}$ egész szám ab-vel osztva. (5 pont)

Jó munkát kívánok!