Klasszikus Algebra és Számelmélet

(1/1b.) ‘Zárthelyi dolgozat’ 2009/2010. tavaszi félév

2010. március 8.

1. Döntse el, hogy milyen tulajdonságokkal bírnak az alábbi leképezések (injektivitás, szürjektivitás, bijektivitás).

(a) $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ z \mapsto z^2 + 1,$ (5 pont)

(b) $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n + 1.$ (5 pont)

2. Döntse el, hogy milyen tulajdonságokkal bírnak az alábbi relációk (reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás).

(a) $\alpha = \{(a, b) : \cos a = \cos b\} \subseteq A \times A$, ahol $A = \left\{\frac{m\pi}{n} : 1 \leqslant m, n \leqslant 4 \text{ egészek}\right\}$,

(b) $\beta = \{(z, z') : z \text{ osztója } z'\text{-nek}\} \subseteq B \times B$, ahol $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$.

Ha a reláció ekvivalenciareláció, akkor adja meg a hozzá tartozó osztályozást; ha a reláció részbenrendezés, akkor rajzolja fel a Hasse-diagrammját.

(10 + 10 pont)

3. Határozzuk meg azokat az a és b természetes számokat, amelyekre ln.k.o.$(a, b) = 22$ és lk.k.t.$(a, b) = 164$ teljesül.

(10 pont)

4. Határozza meg a

(a) $15x - 12y = 73,$ (5 pont)

(b) $15x - 13y = 73$ (5 pont)

diofantoszi egyenletek összes megoldását.

5. Legyen p prímszám. Igazolja, hogy ha $p^2 + 14$ prímszám, akkor $p^2 - p + 1$ is az.

(10 pont)

Jó munkát kívánok!