Polinomfüggvény, gyök, gyöktényezős alak

203. Legyen $f = x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1} \in R[x]$ és $g = x^9 + x^8 + x^7 + x^2 + \overline{1} \in R[x]$. Igaz-e, hogy az f, illetve g polinomokhoz tartozó polinomfüggvények megegyeznek, ha

(a) $R = \mathbb{Z}_3$;
(b) $R = \mathbb{Z}_4$;
(c) $R = \mathbb{Z}_5$;
(d) $R = \mathbb{Z}_7$.

204. Mutassuk meg, hogy az alábbi leképezések nem polinomfüggvények.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$;
(b) $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$.

205. Az $R = \mathbb{Z}_2[x]$ halmazon definiáljuk a $\bowtie$ relációt az alábbi módon:

$$f \bowtie g \iff f(0) = g(0) \text{ és } f(1) = g(1).$$

Mutassuk meg, hogy $\bowtie$ ekvivalenciareláció és határozzuk meg az ekvivaleciaosztályokat.

206. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Határozzuk meg az

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}$$

egyenlet valamennyi gyökét.

207. Határozzuk meg az $f \in R[x]$ polinom gyöktényezős alakját:

(a) $f = x^4 + 4$, $R = \mathbb{C}$;
(b) $f = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $R = \mathbb{R}$;
(c) $f = (x + \cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n + (x + \cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n$, $R = \mathbb{C}$;
(d) $f = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{2m}{2k} x^k$, $R = \mathbb{C}$ (m tetszőleges természetes szám).

208. Bizonyítsuk be, hogy az $f = x^{3u} + x^{3v+1} + x^{3w+2} \in \mathbb{R}[x]$ polinom osztható a $g = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinommal.

Irreducibilitás $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett

209. Bontsuk fel irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomokat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett.

(a) $f = x^4 - 1$; (b) $f = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1$;

(c) $f = x^4 - ax^2 + 1$, ahol $-2 < a < 2$ valós szám;

(d) $f = x^{2n} - 2x^n + 2$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

210. Melyik az a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{R}[x]$, illetve $g\imath\mathbb{C}[x]$ polinom, amelynek

(a) az 1 kétszeres, a 2, 3 és $2 + i$ pedig egyszeres gyöke;

(b) az $5 + i$ kétszeres és az $1 - i$ pedig háromszoros gyöke.

Irreducibilis polinomok $\mathbb{Q}$ felett

211. Irreducibilis-e az $f = 2x^3 - 8x^2 + 6x - 20$ polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}[x]$-ben?

212. Határozzuk meg az $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom racionális gyökeit és irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ felett.

(a) $f = x^7 + 8x^6 + 15x^5 + 10x^3 + 35x^2 + 5x - 30$;

(b) $f = 8x^5 + 30x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 11x - 12$.

213. Tegyük fel, hogy az $f \neq 0$ és g racionális együtthatós polinomokra vannak olyan α és β komplex számok, amelyekre $f(\alpha) = g(\alpha) = f(\beta) = 0$, $g(\beta) = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor f nem irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

214. Legyen p tetszőleges prímszám. Mutassuk meg, hogy az

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

215. Legyen p prímszám és $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + x \pm p \in \mathbb{Z}[x]$. Mutassuk meg, hogy ha

$$1 + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| < p,$$

akkor f irreducibilis.

216. Legyen $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ olyan polinom, amelyre $a_0 \neq 0$ is teljesül. Mutassuk meg, hogy ha $|a_{n-1}| > 1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-2}|$, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

Horner-módszer

217. Határozzuk meg az $f \in R[x]$ polinom helyettesítési értékét az $x_0 \in R$ helyen a Horner-módszer alkalmazásával:

(a) $f = 8x^5 + 30x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 11x - 12$, $R = \mathbb{R}$ és $x_0 = 3$;

(b) $f = x^5 + 9x^3 + 5x^2 + 6$, $R = \mathbb{Q}$ és $x_0 = \dfrac{1}{2}$;

(c) $f = x^4 + x^3 + (2-i)x^2 + 6ix - (1-2i)$, $R = \mathbb{C}$ és $x_0 = 1+i$;

(d) $f = \overline{2}x^4 + \overline{5}x^3 + \overline{1}x^2 - \overline{2}x + \overline{6}$, $R = \mathbb{Z}_7$ és $x_0 = \overline{3}$;

(e) $f = x^{2n} - x^n + 1$, $R = \mathbb{R}$ és $x_0 \in \{1, 2\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

218. Írjuk fel az $f \in R[x]$ polinomot az $x - x_0$ polinom hatványai szerint rendezett alakban.

(a) $f = x^4 - 7x^2 + 5x - 17$, $R = \mathbb{Q}$ és $x_0 = 2$;

(b) $f = x^4 + 1$, $R = \mathbb{C}$ és $x_0 = i$;

(c) $f = x^4 + \overline{3}x^3 - \overline{5}x + \overline{1}$, $R = \mathbb{Z}_{11}$ és $x_0 = \overline{8}$;

(d) $f = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$, $R = \mathbb{R}$ és $x_0 \in \{-1, +1\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

219. Határozzuk meg az

$$f = 16x^6 + 184x^5 + 657x^4 + 469x^3 - 1124x^2 - 528x + 576 \in \mathbb{R}[x]$$

polinom racionális gyökeit és azok multiplicitását.

Derivált, többszörös gyök

220. Az $f = x^2 - 3x + \alpha \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak van többszörös gyöke. Határozzuk meg az α valós paraméter értékét.

221. Határozzuk meg az a és b együtthatókat úgy, hogy $(x-1)^2 \mid ax^{n+1} + bx^n + 1$ teljesüljön ($n \in \mathbb{N}$).

222. Legyen n természetes szám. Igazoljuk, hogy az $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ polinomnak az 1 egész szám háromszoros gyöke.

223. Van-e olyan m természetes szám, amelyre $(x^2 + x + 1)^2 \mid (x+1)^m + x^m + 1$ teljesül?

224. Legyenek a és b valós számok. Az $x^{6n+2} + ax^{3n+1} + b \in \mathbb{R}[x]$ polinomok között van-e olyan, amely osztható az $(x^2 + x + 1)^2$ polinommal?

225. Milyen $\lambda \in \mathbb{C}$-re van az $x^3 - 3x + \lambda$, illetve $x^4 - 4x + \lambda$ polinomoknak többszörös gyöke?

226. Adjunk eljárást tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomból olyan polinom kiszámítására, amelynek gyökei — egyszeres multplicitással — pontosan azok a komplex számok, amelyek f-nek gyökei.

227. Adjunk eljárást tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomból olyan polinom kiszámítására, amelynek gyökei — egyszeres multplicitással — pontosan azok a komplex számok, amelyek f-nek kétszeres gyökei.

228. Adjunk eljárást tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomból olyan polinom kiszámítására, amelynek gyökei — egyszeres multplicitással — pontosan azok a komplex számok, amelyek f-nek legfeljebb háromszoros gyökei.

229. Mutassuk meg, hogy ha az $f \in \mathbb{R}[x]$ n-edfokú polinomnak ($n \geqslant 2$) n darab páronként különböző valós gyöke van, akkor az f' polinomnak $n-1$ darab páronként különböző valós gyöke van.

Harmad- és negyedfokú egyenletek

230. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit:

(a) $f = x^3 + 2x + 1$;

(b) $f = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$;

(c) $f = x^3 + 6x^2 + 30x + 25$;

(d) $f = x^3 - 6ix + 4(1 - i)$;

(e) $f = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$;

(f) $f = x^3 - 3abfgx + f^3ga^3 + fg^2b^3$, ahol $a, b, f, g \in \mathbb{R}$.

231. Legyenek p és q valós számok. Az $x^3 + px + q$ polinom komplex gyökeit jelölje α_1, α_2 és α_3. Igazoljuk, hogy

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

(A $-4p^3 - 27q^2$ kifejezést az $x^3 + px + q$ polinom diszkriminánsának nevezzük.)

232. Oldjuk meg az

$$(y^3 - 3by + a^3 - 3ab)^2 - 4(ay + b)^3$$

egyenletet, ahol az a és b paraméterek valósak.

233. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit:

(a) $f = x^4 + x^3 + x - 1$;

(b) $f = x^4 + 3x^3 - 3x + 1$;

(c) $f = x^4 + -x^3 - x^2 + 2x - 2$;

(d) $f = x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7$.

Lagrange-interpoláció

234. Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelyre

(a) $f(k) = k^2 - 1$ ($k \in \{1, 2, 3\}$) és $f(4) = 0$;

(b) $f(1) = 1$, $f(i) = 2$, $f(-1) = 3$, $f(-i) = 4$;

(c) $f(k) = k^2 + (-1)^{k+1}$ ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$);

(d) $f(k) = 2^k$ ($k \in \{1, 2, 3, 4\}$).

235. Legyen $n \geqslant 3$ természetes szám és $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.)$ Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(\varepsilon_k) = k + 1 \quad (k \in \{0, 1, \ldots n-1\})$$

teljesül.

236. Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(k) = 2^k \quad (k \in \{0, 1, \ldots n\})$$

teljesül ($n \in \mathbb{N}$).

237. Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelyre

$$f(k) = \frac{1}{k} \quad (k \in \{1, \ldots n\})$$

teljesül ($n \in \mathbb{N}$).

Szimmetrikus polinomok

238. Írjuk fel az alábbi szimmetrikus polinomokat az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként?

(a) $\sigma = x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$;

(b) $\sigma = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n \geqslant 4$;

(c) $\sigma = x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z \in \mathbb{R}[x, y, z]$;

(d) $\sigma = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$;

(e) $\sigma = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i^2 x_j \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n \geqslant 4$;

(f) $\sigma = \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} x_i^3 x_j^2 x_k \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

239. Legyen $n \geqslant 3$ tetszőleges természetes szám és $f = 2x^n - 3x^2 + 4x - 6 \in \mathbb{C}[x]$. Az f polinom gyökeit jelölje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Számítuk ki az alábbi összegeket:

(a) $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$;

(b) $\alpha_1^3 + \cdots + \alpha_n^3$;

(c) $\dfrac{1}{\alpha_1} + \cdots + \dfrac{1}{\alpha_n}$;

(d) $\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$.

240. Legyen $f = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 12 \in \mathbb{C}[x]$. Az f polinom gyökei legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$. Határozzuk meg azt a $g \in \mathbb{C}[x]$ főpolinomot, melynek gyökei:

(a) $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_3 + \alpha_1$;

(b) α_1^2, α_2^2, α_3^2;

(c) $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$;

(d) $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_3 - \alpha_1$.

241. Legyen f egész együtthatós főpolinom, melynek mindegyik komplex gyöke 1 abszolútértékű. Igazoljuk, hogy ekkor f minden gyöke egységgyök.

242. Mutassuk meg, hogy az alábbi komplex számok algebrai számok és határozzuk meg a minimálpolinomjukat is.

(a) $\vartheta = \dfrac{17}{29}$; (b) $\vartheta = \sqrt{12}$;

(c) $\vartheta = \sqrt{3} + \sqrt{5}$; (d) $\vartheta = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$;

(e) $\vartheta = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$; (f) $\vartheta = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$;

(g) $\vartheta = \cos 20°$; (h) $\vartheta = \sin 15°$;

(i) $\vartheta = \sqrt{3} + i$; (j) $\vartheta = \sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{3}$.

243. Legyen $r \in \mathbb{Q}$ és $k \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ algebrai szám, akkor a

$$-\alpha, \quad \overline{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad r + \alpha, \quad r\alpha \quad \text{és} \quad \sqrt[k]{\alpha}$$

komplex számok is azok. Adjunk becslést a kapott algebrai számok fokára is.

244. Mutassuk meg, hogy az $\alpha \in \mathbb{C}$ pontosan akkor másodfokú algebrai szám, ha vannak olyan s és t racionális számok, amelyekre $\alpha = s + \sqrt{t}$ és t nem négyzete egy racionális számnak.

245. Legyen $f \in \mathbb{Q}[x]$ egy n-edfokú polinom ($n \in \mathbb{N}$), melynek gyökei az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ komplex számok. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{\ell=1}^{n} \deg \alpha_\ell \leqslant n^2. \tag{1}$$

Mikor áll (1)-ben egyenlőség?

246. Mutassuk meg, hogy ha (1)-ben szigorú egyenlőtlenség érvényes, akkor

$$\sum_{\ell=1}^{n} \deg \alpha_\ell \leqslant n^2 - 2n + 2$$

is teljesül.

247. Mit állíthatunk az α és β komplex számokról, ha

(a) $\alpha \circ \beta$ és $\alpha \bullet \beta$ is algebrai számok,

(b) $\alpha \circ \beta$ algebrai és $\alpha \bullet \beta$ transzcendens szám,

(c) $\alpha \circ \beta$ és $\alpha \bullet \beta$ is transzcendens szám,

ahol $\circ, \bullet \in \{+, -, \cdot, /\}$.

248. Mutassuk meg, hogy az $\pi + e$ és $\pi - e$ valós számok valamelyike transzcendens. (Az még ma is megoldatlan probléma, hogy $\pi \pm e$ transzcendens-e.)

249. Legyen $f \neq 0$ egész együtthatós polinom. Mutassuk meg, hogy ha $\alpha \in \mathbb{C}$ transzcendens, akkor $f(\alpha)$ is az.

250. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{R}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

251. Legyen R integritástartomány és $R^* = R \setminus \{0\}$. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

(a) Ha az oszthatósági reláció ekvivalenciareláció az R^* halmazon, akkor R test.

(b) Ha $x \sim y$ teljesül bármely $x, y \in R^*$-ra, akkor R test.

(c) Ha $a \sim b$ és $c \sim d$, akkor $ac \sim bd$.

(d) Ha $a \sim b$ és $c \sim d$, akkor $a + c \sim b + d$.

(e) Ha R^* valamennyi eleme egység vagy prímelem, akkor R test.

252. Legyen $\omega = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Döntsük el, hogy a megadott R gyűrűben igazak-e az alábbiak:

(a) $i \equiv 1 \pmod{i+1}$, $R = \mathbb{Z}[i]$;

(b) $30 + 12i \equiv 1 + i \pmod{7 - 5i}$, $R = \mathbb{Z}[i]$;

(c) $-17 - 5\sqrt{3}i \equiv -1 \pmod{-5 + i\sqrt{3}}$, $R = \mathbb{Z}[\omega]$;

(d) $x^5 + x^4 \equiv 2x^2 + 2x + 1 \pmod{x^2 + x + 1}$, $R = \mathbb{Z}[x]$.

253. Döntsük el, hogy az 5 egész szám irreducibilis-e a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$ és $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ integritástartományokban?

254. Legyen α prímelem a $\mathbb{Z}[i]$ integritástartományban. Mutassuk meg, hogy ekkor az alábbi állítások közül pontosan egy teljesül.

(1) $\alpha \sim 1 + i$;

(2) α prímelem $\mathbb{Z}$-ben és $\alpha \equiv 3 \pmod 4$;

(3) van olyan $p \in \mathbb{Z}$ prímszám, amelyre $p \equiv 1 \pmod 4$ és $\alpha \mid p$.

255. Bizonyítsuk be, hogy a $6 - i$ komplex szám prímelem $\mathbb{Z}[i]$-ben.

256. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ integritástartományban végtelen sok egység van.

257. Határozzuk meg az R euklideszi gyűrűben a megadott elemek legnagyobb közös osztóját:

(a) $v = 19 + 4i$, $w = 1 - 21i$, $R = \mathbb{Z}[i]$;

(b) $v = 19 - 4i$, $w = 1 - 21i$, $R = \mathbb{Z}[i]$;

(c) $f = x^4 + x^3 + x^2$, $g = x^3 + \overline{1}$, $R = \mathbb{Z}_2[x]$;

(d) $f = \overline{2}x^3 + \overline{1}$, $g = \overline{2}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{1}x + \overline{1}$, $R = \mathbb{Z}_3[x]$;

(e) $f = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x - 5$, $g = 2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$, $R = \mathbb{C}[x]$;

(f) $f = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, $g = x^n - nx + n - 1$, $R = \mathbb{Q}[x]$.

258. Határozzuk meg az alábbi egyenletek valamennyi megoldását:

(a) $(1+3i)u+(3+i)v=2008$ ($\mathbb{Z}[i]$-ben);

(b) $(x^6-1)u+(x^8-1)v=x^4-1$ ($\mathbb{Q}[x]$-ben);

(c) $(\overline{3}x^4+\overline{5}x^3+\overline{2}x^2+\overline{6}x+\overline{4})u+(\overline{2}x^4+\overline{5}x^3+\overline{6}x^2+\overline{4}x+\overline{1})$ ($\mathbb{Z}_7[x]$-ben).

Euklideszi gyűrűk és főideálgyűrűk

259. Mutassuk meg, hogy a Gauss-egészek $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi : a,b\in\mathbb{Z}\}$ gyűrűje euklideszi gyűrű az $\|a+bi\|=a^2+b^2$ normával.

260. Legyen $I\neq\{0\}$ ideál $\mathbb{Z}[i]$-ben. Mutassuk meg, hogy a megadható Gauss-egészeknek olyan véges Z halmaza, amelyre igaz, hogy bármely $w\in\mathbb{Z}[i]$-re van olyan $z\in Z$, hogy $w-z\in I$.

261. Legyen $\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mutassuk meg, hogy az Euler-egészek $\mathbb{Z}[\omega]=\{a+b\omega : a,b\in\mathbb{Z}\}$ gyűrűje euklideszi gyűrű az $\|a+b\omega\|=a^2-ab+b^2$ normával.

262. Legyen $R=\{(a,b) : a,b\in\mathbb{Z}$ és b páratlan$\}$. Definiáljuk az $\oplus$ és $\odot$ műveleteket az alábbi módon ($a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $2\nmid b,d$):

$$(a,b)\oplus(c,d)=(ad+bc,bd),$$
$$(a,b)\odot(c,d)=(ac,bd).$$

Mutassuk meg, hogy $(R;\oplus,\odot)$ euklideszi gyűrű.

263. Határozzuk meg az egységeket a $\mathbb{Z}[i]$ (ld. 199. feladat), $\mathbb{Z}[\omega]$ (ld. 201. feladat) és a 202. feladatban definiált R eukldeszi gyűrűkben.

264. Legyen D euklideszi gyűrű a δ euklideszi normával. Mutassuk meg, hogy a maradékos osztásnál kapott hányados és maradék pontosan akkor egyértelmű, ha bármely $a,b\in D$-re

$$\delta(a+b)\leqslant\max\{\delta(a),\delta(b)\}$$

teljesül.

265. Legyen D euklideszi gyűrű a δ euklideszi normával, valamint legyen $\varphi\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ olyan szigorúan monoton leképezés, amelyre $\varphi(0)=0$. Mutassuk meg, hogy

$$\varphi\circ\delta\colon D\to\mathbb{N}_0,\ d\mapsto\varphi(\delta(d))$$

leképezés is euklideszi norma.

266. Legyen D euklideszi gyűrű. Mutassuk meg, hogy ha az $a\in D$ elem euklideszi normája 1, akkor a egység D-ben. Igaz-e az állítás megfordítása.

267. Legyen D euklideszi gyűrű és

$$\mathfrak{N}_D=\{\delta\colon D\to\mathbb{N}_0 : \delta \text{ euklideszi norma } D\text{-n}\}.$$

Legyen ε az alábbi leképezés:

$$\varepsilon\colon D\to\mathbb{N}_0,\ d\mapsto\min\{\delta(d) : \delta\in\mathfrak{N}_D\}.$$

Mutassuk meg, hogy ε is euklideszi norma, és $a \mid b$ $(a, b \in D)$ esetén $\varepsilon(a) \leqslant \varepsilon(b)$.

268. Bitonyítsuk be, hogy egy D integritástartomány pontosan akkor főideálgyűrű, ha van olyan $\nu\colon D \to \mathbb{N}_0$ leképezés, amelyre teljesülnek az alábbiak:

- $\nu(d) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $d = 0$,
- minden olyan $a, b \in D$ elemre, amelyre $b \neq 0$ és $b \nmid a$ teljesül vannak olyan $u, v \in D$ elemek, hogy $0 < \nu(au + bv) < \nu(b)$.

Irreducibilitás

269. Bontsuk irreducibilis elemek szorzatára az alábbi euklideszi gyűrűk megadott elemeit:

(a) $x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{C}[x]$;

(b) $x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{R}[x]$;

(c) $x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$;

(d) $x^{2n} + 2x^n + 2 \in \mathbb{R}[x]$;

(e) $x^7 - \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$;

(f) $x^7 - \overline{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$;

(g) $3 + 7i \in \mathbb{Z}[i]$;

(h) $3 - 5\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$.

270. A Schönemann–Eisenstein-tétel felhasználásával igazoljuk, hogy az

(a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

(b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

(c) $x^4 - x^3 + 2x + 1$

polinomok irreducibilies $\mathbb{Q}[x]$-ben.

271. Legyen p prímszám és $k \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

$$x^{p^{k-1}} - 1 \mid x^{p^k} - 1$$

teljesül $\mathbb{Z}[x]$-ben. Legyen $X_{p^k} \in \mathbb{Z}[x]$ az a polinom, amelyre $x^{p^k} - 1 = X_{p^k}(x^{p^{k-1}} - 1)$ teljesül. Igazoljuk, hogy az X_{p^k} polinom irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben.

272. Legyen $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$ irreducibilis polinom. Mutassuk meg, hogy ekkor f-nek nincs egész gyöke, és nem osztható egyetlen

$$x^2 + \frac{cm - am^2}{d - m^2}x + m$$

alakú polinommal sem, ahol $m \neq d$ egész szám és $m \mid d$.

273. Legyen t természetes szám és $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ különböző egész számok. Mutassuk meg, hogy az

$$(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_t) - 1, \quad \text{illetve} \quad (x - \alpha_1)^2 \cdots (x - \alpha_t)^2 + 1$$

egész együtthatós polinomok irreducibilisek.