Kötelező házi feladat(ok)

17. Legyen $r * s = (r+s)/2$ $(r, s \in \mathbb{R})$. Igaz-e, hogy $(\mathbb{R};\, *\,)$ csoport?

18. Legyen $m * n = (-1)^n m + (-1)^m n$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. Igaz-e, hogy $(\mathbb{Z};\, *\,)$ csoport?

Absztrakt algebrai struktúrák – Csoportok, gyűrűk és testek

194. Milyen struktúrák a következők:

(a) $(\mathbb{N};\, \clubsuit\,)$, ahol $\clubsuit : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ m \clubsuit n = \varphi(m) \cdot \sigma(n)$;

(b) $(\mathbb{Z};\, \circ\,)$, ahol $\circ \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ m \circ n = mn + 4(m+n) + 12$;

(c) $(A;\, \diamond\,)$, ahol $A = \{r \in \mathbb{R} : -1 < r < 1\}$ és $\diamond \colon A \times A \to A,\ u \diamond v = \dfrac{u+v}{1+uv}$.

(d) $(A;\, *\,)$, ahol $A = \{f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} : f(1) = 1\}$ és

$$*\colon A \times A \to A,\ (f, g) \mapsto f * g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C},\ n \mapsto \sum_{d \in \mathbb{N},\ d \mid n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right).$$

195. Milyen struktúrák a következők:

(a) $(\mathbb{N};\, \wedge\,,\, \vee\,)$, ahol $\wedge \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ m \wedge n = \text{ln.k.o.}(m, n)$ és $\vee \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ m \vee n = \text{lk.k.t.}(m, n)$;

(b) $(P(\mathbb{Z});\, \cap\,,\, \Delta\,)$, ahol $\cap$ a halmazelméleti metszet és Δ a szimmetrikus differencia.

196. Mutassuk meg, hogy $R_n = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_n : \text{ln.k.o.}(a, n) = 1\}$ csoport a szokásos szorzásra vonatkozóan.

> Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{G} = (G;\, \cdot\,)$ csoport **ciklikus**, ha van olyan $g \in G$ eleme, amelyre $G = \{g^k : k \in \mathbb{Z}\}$ teljesül. A g elemet a csoport **generátorának** nevezzük. Például: a $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z};\, +\,)$ csoport ciklikus, mert $\mathbb{Z} = \{1^k = k \cdot 1 : k \in \mathbb{Z}\}$; az $R_{10} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}\}$ csoport is ciklikus, mert $R_{10} = \left\{\overline{3}^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

197. Mely n természetes számokra ciklikus a redukált maradékosztályok R_n csoportja?

198. Legyenek u és v olyan egész számok, amelyekre az $x^2 + ux + v$ polinom gyökei nem egész számok. Jelölje az egyik gyököt ξ, a másik gyököt ξ'. Definiáljuk a $\mathbb{Z}[\xi]$ halmazt a következőképpen:

$$\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Igazoljuk a következőket:

(a) $\xi \in \mathbb{C}$ nem racionális szám;

(b) Tetszőleges a, a, b, b' egész számokra $a + b\xi = a' + b'\xi$ pontosan akkor teljesül, ha $a = a'$ és $b = b'$;

(c) $\mathbb{Z}[\xi]$ gyűrű a szokásos összeadásra és szorzásra.

199. Legyen $\alpha = \sqrt[3]{2}$ és

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}[\alpha]$ gyűrű a szokásos összeadásra és szorzásra?

200. Legyen $\alpha = \sqrt[3]{2}$ és

$$R = \{a + b\alpha + c\alpha^2 : a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Igaz-e, hogy R gyűrű a szokásos összeadásra és szorzásra?

201. Legyen n tetszőleges természetes szám. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}_n$ pontosan akkor integritástartomány, ha n prímszám.

202. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Hány eleme van a

$$\mathcal{P}_{\leqslant n} = \{f \in \mathbb{Z}_2[x] : \deg(f) \leqslant n\}, \quad \text{és a} \quad \mathcal{P}_n = \{f \in \mathbb{Z}_2[x] : \deg(f) = n\}$$

halmazoknak?