Kötelező házi feladat(ok)

15. Határozzuk meg a $z = \sqrt[16]{(1+i)^{16}}$ komplex szám(ok) kanonikus alakját.

16. Melyek azok a v, w komplex számok, amelyekre $v\overline{w}$ pozitív valós szám?

Házi feladat(ok)

19. Melyek azok a v, w komplex számok, amelyekre $vw + v + w$ valós szám?

Komplex számok

> Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ekkor $\arg z$ az a $[0, 2\pi)$ intervallumba eső valós szám, amelyre $z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$ teljesül; $\arg z$ a z komplex szám **argumentuma**.

164. Legyen $v = -2 + 3i$ és $w = 2 + 3i$ Határozzuk meg az alábbi komplex számok kanonikus alakját.

(a) $z = (1+i)v + (2-i)w$; (b) $z = v - \overline{w}$;

(c) $z = v \cdot w$; (d) $z = \dfrac{v}{w}$;

(e) $\overline{v^2 \cdot \overline{w}} \cdot \dfrac{v-w}{\overline{v} + \overline{w}}$; (f) $\dfrac{\overline{v} \cdot w^2 - \overline{w} \cdot v^2}{v+w}$.

165. Határozzuk meg a 0, ± 1, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cdot i$, $\varepsilon_1 \cdot \dfrac{1}{2} + \varepsilon_2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$, $\varepsilon_1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon_2 \cdot \dfrac{1}{2} i$ komplex számok trigonometrikus alakját.

166. Legyen $v = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ és $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$. Határozzuk meg az alábbi komplex számok kanonikus és trigonometrikus alakját.

(a) $z = -v^{2009} \cdot i + w^{2011}$; (b) $z = \dfrac{v^{2013}}{w^{2015}}$;

(c) $z = (v \cdot \overline{w})^{2017}$; (d) $z = \dfrac{v}{w}$.

167. Határozzuk meg az alábbi egyenletek valamennyi megoldását a komplex számok halmazán.

(a) $|z| - z = 1 + 2i$; (b) $z^2 + |z| = 0$;

(c) $(1+i) \cdot z^2 = 3 + 2i$; (d) $z^2 + (1-i) \cdot z + (2+3i) = 0$;

(e) $i \cdot \overline{z} = z^2$; (f) $z^2 - \overline{z}^3 = 1$.

168. Mutassuk meg, hogy tetszőleges z komplex számra teljesülnek a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &\leqslant |z|, \\ \operatorname{Im}(z) &\leqslant |z|, \\ |z| &\leqslant |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek.

169. Igazoljuk, hogy tetszőleges v és w komplex számra teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} |v+w| &\leqslant |v| + |w|, \\ |v| - |w| &\leqslant |v-w|. \end{aligned}$$

170. Bizonyítsuk be, hogy a

$$|v+w|^2 + |v-w|^2 = 2(|v|^2 + |w|^2)$$

egyenlőség bármely $v, w \in \mathbb{C}$-re teljesül.

171. Legyen z olyan komplex szám, melynek abszolútértéke 2. Mutassuk meg, hogy $2 \leqslant |z-4| \leqslant 6$.

172. Legyen z olyan komplex szám, melynek abszolútértéke 3. Mutassuk meg, hogy $\frac{8}{11} \leqslant \left|\frac{z^2+1}{z^2+2}\right| \leqslant \frac{10}{7}$.

173. Bizonyítsuk be, hogy ha a z komplex szám abszolútértéke $r > 2$, akkor

$$\left|\frac{1}{z^2+z+1}\right| \leqslant \frac{1}{r^2-r-1}.$$

174. Hol helyezkednek el a komplex számsíkon azok a z pontok, amelyekre

(a) $|z| < 1$, $|z| = 1$, $|z| \geqslant 1$; (b) $\arg z \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$, $\arg z > \frac{\pi}{4}$;

(c) $\left|\frac{z+1}{z+4}\right| = 2$; (d) $\left|\frac{z+2+i}{z+3-i}\right| \leqslant \sqrt{2}$;

(e) $\left|\frac{z+2+i}{z+3-i}\right| = 1$; (f) $|z| \arg z = \frac{\pi}{2}$;

(g) $|z| + \arg z \geqslant 1$; (h) $|z+1| = |2z-1|$

teljesül?

175. Legyenek z_1, z_2 és z_3 a komplex számsík pontjai. Mutassuk meg, hogy a pontok pontosan akkor illeszkednek egy egyenesre, ha $z_1(\overline{z_2} - \overline{z_3}) + z_2(\overline{z_3} - \overline{z_1}) + z_3(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 0$.

176. Legyenek z_1, z_2 és z_3 a komplex számsík különböző pontjai. Mutassuk meg, hogy a pontok pontosan akkor csúcsai egy szabályos háromszögnek, ha $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.

177. Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, amelynek két csúcsa a $v = 3 - i$ és $w = 1 - 2i$ komplex szám.

178. Legyen $v, w \in \mathbb{C}$. Bizonyítsuk be, hogy $\arg v = 2 \arg w$ pontosan akkor teljesül, ha $\overline{v}w^2$ pozitív valós szám.

179. Legyenek z_1, z_2 és z_3 a komplex számsík olyan páronként különböző pontjai, amelyek abszolútértéke 1. Igazoljuk, hogy $\arg \dfrac{z_1}{z_2} = 2 \arg \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$.

180. Mutassuk meg, hogy az $f\colon \mathbb{C} \to \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\},\ z \mapsto \dfrac{z}{1 + |z|}$ leképezés bijekció.

181. Legyen $\omega = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Határozzuk meg az alábbi komplex számok kanonikus alakját:

(a) ω^{2008};

(b) $\sqrt[2008]{\omega + 1}$;

(c) $\sqrt[2008]{\overline{\omega} - \omega^2}$;

(d) $\sqrt[2002]{(1 - i) \cdot \omega}$.

182. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(a) $z^8 + i = 0$;

(b) $z^4 + 4 = 0$;

(c) $z^6 = 1 + i$;

(d) $z^6 = i$.

183. Legyen $z_\alpha = \cos\alpha + i \sin\alpha$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg a $z_\alpha - 1$ és $z_\alpha + 1$ komplex számok trigonometrikus alaját.

184. Mutassuk meg, hogy

$$\cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos n\vartheta = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta - \sin\frac{\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}.$$

185. Határozzuk meg a felső félsíkba eső 12-edik egységgyököket. Melyek lesznek ezek közül primitív 12-edik egyéggyökök.

186. Legyen n tetszőleges természetes szám és $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ n-edik egységgyök. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k w^{k-1} = \frac{n}{w - 1};$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 w^{k-1} = \frac{n^2}{w - 1} - \frac{2n}{(w - 1)^2}.$$

187. Legyen n tetszőleges természetes szám és legyen $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}$, ahol $0 \leqslant k < n$. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$;

(b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^2$; (d) $\displaystyle\prod_{0\leqslant j,k<n,\ j\neq k}^{n} \varepsilon_j\varepsilon_k$.

188. Legyen n tetszőleges természetes szám. Hozzuk zárt alakra az alábbi összegeket:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/4]}\binom{n}{4k}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/4]}(-1)^k\binom{n}{4k}$; (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/3]}\binom{n}{3k}$.

189. Határozzuk meg az $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$ komplex szám trigonometrikus alakját, ahol $\alpha\in\mathbb{R}$ és $n\in\mathbb{N}$.

190. Igazoljuk, hogy

$$\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}n\alpha},$$

ahol $n\in\mathbb{N}$ és $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

191. Tegyük fel, hogy a $z\in\mathbb{C}$ komplex számra és az $\alpha\in\mathbb{R}$ valós számra teljesül, hogy $z+\frac{1}{z}=2\cos\alpha$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges n természetes számra igaz, hogy $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\alpha$.

192. Legyen n tetszőleges természetes szám. Határozzuk meg az n-edik primitív egységgyökök szorzatát és összegét.

193. Le lehet-e fedni egy 6×10-es sakktáblát 1×4-es dominókkal?