Házi feladat(ok)

16. Legyen $\varphi_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi_2(n) = |\{i : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ és } \text{ln.k.o.}(i,n) = \text{ln.k.o.}(i+1,n) = 1\}|$. Határozzuk meg $\varphi_2(n)$ értékét.

17. Igazoljuk, hogy érvényes a

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\ \text{ln.k.o.}(k,n)=1} \text{ln.k.o.}(k-1,n) = \varphi(n)\tau(n)$$

egyenlőség.

18. Tetszőleges $s > 1$ valós számra legyen $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s-1)\zeta(s).$$

A prímszámok eloszlása

A továbbiakban tetszőleges n természetes számra p_n jelöli az n-edik prímszámot (azaz $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$), és legyen $\mathbb{P} = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$.

147. Mutassuk meg, hogy $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

148. Legyen n természetes szám. Igazoljuk, hogy n vagy $n+1$ felírható különböző prímszámok összegeként.

149. Legyenek k és n természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+k}$$

összeg nem egész szám.

150. Van-e olyan K természetes szám, amelyre az

$$A = \{c \in \mathbb{N} : 100 \leqslant c \leqslant 200 \text{ és } c \text{ prímszám}\},$$
$$B = \{c \in \mathbb{N} : 100 \leqslant c \leqslant 200 \text{ és } \text{ln.k.o.}(c,K) = 1\}$$

halmazok megegyeznek. Amennyiben létezik, megtudnánk adni egy alkalmas K-t?

151. Legyen $H = \{n \in \mathbb{N} : p_k \nmid n \ (k \geqslant 3)\}$ és J véges részhalmaza H-nak. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n \in J} \frac{1}{n} \leqslant 3$.

152. Legyen $e_n = p_1 \cdots p_n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Igaz-e, hogy e_n prímszám minden $n \in \mathbb{N}$-re?

153. Igazoljuk, hogy

$$\pi(n) = \sum_{j=2}^{n} \left(\left[\frac{(j-1)!+1}{j} \right] - \left[\frac{(j-1)!}{j} \right] \right).$$

Alkalmas-e ez a képlet a $\pi(n)$ függvény gyakorlati kiszámítására?

Természetes számok felbontása hatványok összegére

154. Bontsuk fel a $H \subseteq \mathbb{N}$ halmaz elemeit k-adik hatványok összegére úgy, hogy a lehető legkevesebb k-adik hatványt használjuk fel.

(a) $H = \{13, 23, 41, 3731\}$, $k = 2$;

(b) $H = \{7, 28, 60\}$, $k = 2$;

(c) $H = \{370, 1729\}$, $k = 3$;

(d) $H = \{19, 2002, 2010\}$, $k = 4$.

155. Tetszőleges $k \geqslant 2$ természetes számra legyen $S_k = \{a_1^2 + \cdots + a_k^2 : a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0\}$. Mutassuk meg, hogy S_2 és S_4 zárt a szorzásra, de S_3 nem.

156. Legyen $S_2' = \{a_1^2 + a_2^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0 \text{ és } \text{ln.k.o.}(a_1, a_2) = 1\}$. Igaz-e, hogy S_2' zárt a szorzásra?

157. Mutassuk meg, hogy ha $n \in S_2'$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

- $4 \nmid n$,
- ha $p \mid n$ és p prímszám, akkor $p \equiv 1 \pmod 4$.

158. Legyen $S_2'' = \{a_1^2 + a_2^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0,\ 2 \nmid a_1^2 + a_2^2 \text{ és } \text{ln.k.o.}(a_1, a_2) = 1\}$. Igaz-e, hogy S_2'' zárt a szorzásra?

159. Mutassuk meg, hogy $4^k(8m+7) \notin S_3$, ahol $k, m \in \mathbb{N}_0$.

160. Legyen p prímszám. Mutassuk meg, hogy ha $p \equiv 1 \pmod 4$, akkor az $x^2 + y^2 = p$ diofantoszi egyenletnek pontosan egy olyan megoldása van, amelyre $1 \leqslant x < y$ teljesül.

161. Legyen $S_2^\star = \{a_1^2 + 4a_2^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0\}$. Mutassuk meg, hogy $S_2^\star$ zárt a szorzásra. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, amelyekre az $x^2 + 4y^2 = n$ diofantoszi egyenlet megoldható.

162. Mutassuk meg, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, akkor az oldal hosszak szorzata osztható 60-nal.

163. Adjuk meg az összes olyan derékszögű háromszöget, amelynek oldalai egész számok és a kerület és terület mérőszáma megegyezik.