Kötelező házi feladat(ok)

12. Oldjuk meg a $\varphi(n) = a$ egyenletet ($a \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$).

13. Mikor van olyan $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gyengén multiplikatív számelméleti függvény, amelyre $f(6) = a$, $f(10) = b$ és $f(15) = c$ teljesül?

14. Oldjuk meg a $\sigma(n) - n = 21$ egyenletet.

Számelméleti függvények

f	$f(1)$	$f(p^\alpha)$	$f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r})$
u	1	0	0
$\mathbf{1}$	1	1	1
id	1	p^α	$p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$
φ	1	$p^\alpha(1-1/p)$	$p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}(1-1/p_1)\cdots(1-1/p_r)$
σ	1	$(p^{\alpha+1}-1)/(p-1)$	$(p_1^{\alpha_1+1}-1)/(p_1-1)\cdots(p_r^{\alpha_r+1}-1)/(p_r-1)$
μ	1	$\begin{cases} -1, & \text{ha } \alpha = 1 \\ 0, & \text{ha } \alpha > 1 \end{cases}$	$\begin{cases} (-1)^r, & \text{ha } \alpha_1 = \cdots \alpha_r = 1 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$
τ	0	$\alpha + 1$	$(\alpha_1 + 1)\cdots(\alpha_r + 1)$
τ^*	0	1	r
τ^{**}	0	α	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$

A fenti táblázatban p prímszám, $\alpha \in \mathbb{N}$; $p_1, \ldots, p_r$ páronként különböző prímszámok, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ és $r \in \mathbb{N}$.

120. Van-e olyan h

(a) gyengén additív,

(b) gyengén multiplikatív

számelméleti függvény, amelyre $h(6) = 0$, $h(10) = 1$ és $h(15) = 3$ teljesül?

121. Legyenek $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ számelméleti függvények. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

(a) Ha f és g gyengén multiplikatív, akkor az $f \circ g$ függvény is gyengén multiplikatív.

(b) Ha f és g totálisan multiplikatív, akkor az $f \circ g$ függvény is totálisan multiplikatív.

(c) Ha f gyengén, g pedig totálisan multiplikatív, akkor az $f \circ g$ függvény gyengén multiplikatív.

(d) Ha f totálisan, g pedig gyengén multiplikatív, akkor az $f \circ g$ függvény gyengén multiplikatív.

122. Legyen f gyengén additív számelméleti függvény. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{N}$-re teljesül az

$$f(a) + f(b) = f\big(\text{ln.k.o.}(a,b)\big) + f\big(\text{lk.k.t.}(a,b)\big)$$

összefüggés.

123. Legyen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ számelméleti függvény. Bizonyítsuk be, hogy f pontosan akkor gyengén additív, ha a $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto 2^{f(n)}$ számelméleti függvény gyengén multiplikatív.

124. Legyen

$$f\colon\ \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \times \mathbb{N},\ (x,n) \mapsto |\,\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant x,\ \text{ln.k.o.}(k,n) = 1\}\,|.$$

Igazoljuk a következőket:

(a) $\sum_{d|n} f\left(\frac{x}{d}, \frac{n}{d}\right) = [x]$;

(b) $f(x,n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left[\frac{x}{d}\right]$.

125. Legyen n olyan természetes szám, amelyre $3 \nmid n\varphi(n)\sigma(n)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy n négyzetszám.

126. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $\sigma(n) = n + 12$; (b) $n - \varphi(n) = 17$;

(c) $\mu(n^2 + 3) = 0$, ahol $2 \nmid n$; (d) $n + \tau(n) = \sigma(n)$;

(e) $\sigma(p^n) = 781$, ahol p prímszám és $n \in \mathbb{N}$;

(f) $\sigma(p^4) = n^2$, ahol p prímszám és $n \in \mathbb{N}$.

127. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra teljesülnek a

$$\varphi(n) \geqslant \frac{n}{\tau^*(n) + 1} \qquad \text{és} \qquad \sigma(n) \leqslant n\big(\tau^*(n) + 1\big)$$

egyenlőtlenségek, ahol $\tau^*(n)$ az n természetes szám különböző prímosztóinak a számát jelöli ($\tau^*(1) = 0$ és $\tau^*(n) = r$, ha $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, ahol $p_1, \dots, p_r$ páronként különböző prímszámok és $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$).

128. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra teljesül a

$$2^{\tau^*(n)} \leqslant \tau(n) \leqslant 2^{\tau^{**}(n)}$$

egyenlőtlenség, ahol $\tau^{**}(n)$ az n természetes szám prímosztóinak a számát jelöli ($\tau^{**}(1) = 0$ és $\tau^{**}(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$, ha $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, ahol $p_1, \dots, p_r$ páronként különböző prímszámok és $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$).

129. Igazoljuk, hogy tetszőleges N természetes számhoz van olyan $n = n(N) \in \mathbb{N}$, amelyre

$$\varphi(n) > \max\big(\varphi(n-1) + N, \varphi(n+1) + N\big)$$

teljesül.

130. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sum_{d \in \mathbb{N},\ d|n} \frac{\sigma(d^2)}{d} = \frac{\sigma(n)^2}{n}$$

egyenlőség tetszőleges n természetes számra teljesül.

131. Mutassuk meg, hogy $\sigma(n)$ pontosan akkor páratlan, ha $n = m^2$ vagy $n = 2m^2$.

132. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re teljesül, hogy

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m),$$

ahol $\sigma_k(1) = 1$ és $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ $(n > 1)$.

133. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sum_{d \in \mathbb{N},\ d|n} \tau(n)^3 = \left(\sum_{d \in \mathbb{N},\ d|n} \tau(n) \right)^2$$

egyenlőség tetszőleges n természetes számra teljesül.

134. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $s > 1$ valós számra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta(s)^2,$$

ahol $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

135. Tetszőleges n természetes számra n_{prt} jelölje n legnagyobb páratlan osztóját. Mutassuk meg, hogy n-et $\tau(n_{\mathrm{prt}})$-féleképpen lehet felírni egymást követő természetes számok összegeként.

136. Tetszőleges n természetes számra legyen

$$\xi(n) = |\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{lk.k.t.}(a,b) = n\}|.$$

Igazoljuk, hogy $\xi(n) = \tau(n^2)$.

137. Mutassuk meg, hogy az n természetes szám páratlan osztóinak összege

$$-\sum_{d \in \mathbb{N},\ d|n} (-1)^{n/d} d.$$

Ha n páros, akkor a fenti összeg éppen $\sigma(n) - 2\sigma(n/2)$.

138. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenlőtlenségek tetszőleges $n > 1$ egész számra teljesülnek.

(a) $\sigma(n) \leqslant \binom{n+1}{2}$;

(b) $\sigma(n) \leqslant \binom{[n/2]+1}{2} + n$;

(c) $\sigma(n) \leqslant \frac{(n+1)\tau(n)}{2}$;

(d) $\sigma(n) \leqslant \frac{n\tau(n)}{2} + 1$;

(e) $n + 2\tau(n) - 3 \leqslant \sigma(n) < 2n\ln(n) + \frac{1}{4}$;

(f) $\sigma(n)\varphi(n) \leqslant n^2$; (g) $\sigma(n) + \varphi(n) \geqslant 2n$;

(h) $\sigma(n)\varphi(n) > \dfrac{n^2}{2}$.

139. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(n) \mid n\sigma(n) - 2$ pontosan akkor teljesül, ha n prímszám vagy $n \in \{1, 4, 6, 22\}$.

140. Tetszőleges m nemnegatív egész számra definiáljuk a Σ_m és a Φ_m számelméleti függvényeket a következőképpen:

$$\Sigma_m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^m, \qquad \Phi_m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n,\\ \text{ln.k.o.}(k,n)=1}} k^m.$$

Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 1$ egészre teljesülnek, hogy

(a) $\Phi_m(n) = \sum_{d|n} \mu(d) d^m \Sigma_m(n/d)$;

(b) $\Phi_1(n) = \frac{n}{2}\varphi(n)$;

(c) $\Phi_2(n) = \left(\frac{n^2}{3} + \frac{(-1)^r}{6} p_1 \cdots p_r\right) \varphi(n)$, ahol $p_1, \ldots, p_r$ az $n > 1$ természetes szám összes különböző prímosztói.

141. Mutassuk meg, hogy minden páros tökéletes szám utolsó számjegye 6 vagy 8.

142. Mutassuk meg, hogy minden páros tökéletes szám utolsó két számjegye 06, 28, 36, 56 vagy 96.

143. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ páratlan tökéletes szám, akkor

(a) $n = s^2 p$ alakban írható fel, ahol $s \in \mathbb{N}$ és $p \equiv 1 \pmod 4$ prímszám;

(b) $n \equiv 1 \pmod{12}$ vagy $n \equiv 9 \pmod{36}$.

Azt mondjuk, hogy az n természetes szám **hiányos**, ha $\sigma(n) < 2n$.
Azt mondjuk, hogy az n természetes szám **bővelkedő**, ha $\sigma(n) > 2n$.

144. Igazoljuk az alábbi állításokat.

(a) Minden prímhatvány hiányos.

(b) Ha $n = p^\alpha q^\beta$, ahol p és q különböző páratlan prímszámok, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, akkor n hiányos.

(c) Egy bővelkedő szám minden többszöröse is bővelkedő.

145. Melyek azok a természetes számok, amelyekre $\sigma(n) = 2n + 1$ teljesül?

Azt mondjuk, hogy az n természetes szám **harmonikus**, ha pozitív osztóinak harmonikus közepe egész szám.

146. Igazoljuk az alábbi állításokat.

(a) Az n természetes szám pontosan akkor harmonikus, ha $\sigma(n) \mid n\tau(n)$.

(b) Minden tökéletes szám harmonikus.

(c) Egy prímhatvány nem lehet harmonikus szám.

(d) A négyzetmentes számok közül egyedül a 6 harmonikus.