Kötelező házi feladat(ok)

11. Határozzuk meg az $\left(\frac{39}{19}\right)$, $\left(\frac{37}{19}\right)$ és $\left(\frac{-100}{19}\right)$ Legendre-szimbólumok értékét.

Házi feladat(ok)

14. Legyenek a és $m > 0$ egymáshoz relatív prím egészek. Mutassuk meg, hogy ha az $x^2 \equiv a \pmod{m}$ kongruencia megoldható, akkor modulo m pontosan 2^{u+v} megoldása van, ahol u az m egész szám páratlan prímosztóinak a száma, és

$$v = \begin{cases} 0, & \text{ha } 4 \nmid m, \\ 1, & \text{ha } 4 \mid m, \text{ de } 8 \nmid m, \\ 2, & \text{ha } 8 \mid m. \end{cases}.$$

15. Mutassuk meg, hogy a 7 egész szám primitív gyök modulo p, ha $p = 2^{2^n} + 1$ prímszám és $n \geqslant 2$.

Négyzetes maradékok, Legendre-szimbólum

111. Határozzuk meg az $\left(\frac{501}{773}\right)$ és $\left(\frac{503}{773}\right)$ Legendre-szimbólumok értékét.

112. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $3x^2 + 5x + 5 \equiv 0 \pmod{13}$; (b) $7x^2 + 8x \equiv 5 \pmod{17}$;

(c) $6x^{25} + x^5 + 5x \equiv 0 \pmod{23}$; (d) $2x^{17} + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{19}$.

113. Az $N = 6119 = 82^2 - 5 \cdot 11^2$ észrevételt felhasználva mutassuk meg, hogy tetszőleges p prímszámra, ha $p \mid N$, akkor $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$.

114. Legyen $p > 2$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy a legkisebb négyzetes nemmaradék modulo p mindig prímszám.

115. Határozzuk meg a $\left(\frac{3}{p}\right)$ Legendre-szmbólum értékét, ahol $p \neq 3$ prímszám.

116. Legyen $p > 2$ prímszám és

$$K_p = \{a : 1 \leqslant a < p,\ a \text{ négyzetes maradék modulo } p\}.$$

Határozzuk meg a $\prod_{a \in K_p} a$ szorzat értékét modulo p.

117. Legyen $n \geqslant 3$ tetszőleges természetes szám és legyen $m = 2^{n-1}$. Mutassuk meg, hogy az $x^{2m} \equiv 2^m \pmod{p}$ kongruenciának bármely p prímszámra van megoldása.

118. Van-e olyan $p > 2$ prímszám, amelyre az

$$x^2 \equiv h \pmod{p} \quad (h \in H)$$

kongruenciák egyike sem oldható meg, ahol $H = \{30, 33, 70, 105, 165\}$.

119. Legyen $p > 2$ tetszőleges prímszám, $n \in \mathbb{Z}$, valamint legyen

$$\left(\frac{n}{p}\right)' = \begin{cases} \left(\frac{n}{p}\right), & \text{ha } p \nmid n, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi összegeket, ahol a és b tetszőleges egész számok.

(a) $\sum_{0 \leqslant n < p} \left(\frac{an+b}{p}\right)'$;

(b) $\sum_{0 \leqslant n < p} \left(\frac{n(n+a)}{p}\right)'$;

(c) $\sum_{1 \leqslant n \leqslant (p-1)/2} \left(\frac{n}{p}\right)'$, ha $p \equiv 1 \pmod 4$;

(d) $\sum_{1 \leqslant n \leqslant (p-1)/2} \left(\frac{2n-1}{p}\right)'$, ha $p \equiv 1 \pmod 4$.