Kötelező házi feladat(ok)

5. Legyen V a véges tizedes törtek halmaza. Határozzuk meg az egységeket és a felbonthatatlan elemeket V-ben.

6. Az $n > 1$ összetett természetes szám minden osztója nagyobb, mint $\sqrt[3]{n}$. Mutassuk meg, hogy n két prímszám szorzata.

Házi feladat(ok)

8. Legyenek a és b olyan pozitív egészek, amelyekre $\text{ln.k.o.}(a, b) = 1$ teljesül. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre az $ax + by = n$ lineáris diofantoszi egyenletnek van olyan megoldása, amelyre $x, y \geqslant 0$ teljesül.

9. Tetszőleges n természetes számra legyen $\pi(n)$ az n-nél kisebb vagy egyenlő prímek száma, és jelölje p_n az n-edik prímszámot ($n \in \mathbb{N}$). Legyen

$$A = \{n + p_n - 1 : n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{n + \pi(n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Mutassuk meg, hogy $A \cap B = \emptyset$ és $A \cup B = \mathbb{N}$.

Maradékos osztás, euklideszi algoritmus

32. Határozzuk meg az $a = 1524$ és $b = 1212$ egészek legnagyobb közös osztóját.

33. Ha a 10849 és 11873 számokat ugyanazzal a háromjegyű számmal maradékosan elosztjuk, mind a kétszer ugyanazt a (nemnegatív) maradékot kapjuk. Mennyi ez a maradék?

34. Milyen maradékot adhat egy négyzetszám 3-mal, 4-gyel, 5-tel, illetve 8-cal osztva?

35. Legyenek a és b olyan egész számok, amelyek valamelyike 0-tól különböző. Mutassuk meg, hogy

$$\min\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z},\ ax + by > 0\} = \text{ln.k.o.}(a, b).$$

36. Az a, b ($a > b$) természetes számokra végrehajtott euklideszi algoritmus pontosan két lépésből áll. Mit állíthatunk a számokról.

37. Az a, b ($a > b$) természetes számokra végrehajtott euklideszi algoritmus pontosan három lépésből áll és $\text{ln.k.o.}(a, b) = 1$. Mit állíthatunk a számokról.

38. Legyenek m és n tetszőleges természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy $\text{ln.k.o.}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{ln.k.o.}(m,n)} - 1$.

39. Bizonyítsuk be, hogy az $\dfrac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$ tört egyetlen a egészre sem egyszerűsíthető.

40. Legyenek m és n természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy ha m páratlan, akkor ln.k.o.$(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$.

41. Legyen $a_n = 2^{2^n} + 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Bizonyítsuk be, hogy ln.k.o.$(a_i, a_j) = 1$, ha $i < j$ tetszőleges természetes számok.[1]

42. Definiáljuk az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot a következőképpen:

$$a_1 = 3, \quad a_n = a_{n-1}^2 - 2 \ (n \geqslant 2).$$

Bizonyítsuk be, hogy ln.k.o.$(a_i, a_j) = 1$, ha $i < j$ tetszőleges természetes számok.

Lineáris diofantoszi egyenletek

43. Határozzuk meg az alábbi lineáris diofantoszi egyenletek megoldását, ahol n tetszőleges egész szám.

(a) $12x + 14y = 6$;

(b) $6188x + 4709y = 323$;

(c) $(3n + 5)x + (7n + 12)y = 2008$;

(d) $(3n + 4)x + (7n + 12)y = 28$.

44. Határozzuk meg az $19x + 20y = 1909$ lineáris diofantoszi egyenlet azon megoldásait, amelyekre $x, y > 0$ teljesül.

45. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre a $3x + 5y = n$ lineáris diofantoszi egyenletnek van olyan megoldása, amelyre $x, y \geqslant 0$ teljesül.

46. Megoldható-e a $6x+10y+15z = 2008$ lineáris diofantoszi egyenlet. Ha van megoldás, akkor határozzuk meg az összes megoldást.

Prímszám, felbonthatatlan szám, a számelmélet alaptétele

47. Adjuk meg az összes olyan n természetes számot, amelyre az alábbi számok mindegyike prímszám:

(a) $n + 2$ és $n + 4$;

(b) n és $n^2 + 8$;

(c) $n + 6, n + 12, n + 18$ és $n + 24$;

(d) $n^3 - 6$ és $n^3 + 6$.

48. Legyenek a és k egynél nagyobb egészek. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.

(a) Ha $a^k - 1$ prímszám, akkor $a = 2$ és k prímszám.

(b) Ha $a^k + 1$ prímszám, akkor k kettőhatvány.

49. Mely n természetes számokra lesz prímszám

(a) $n^3 - n + 3$;

(b) $n^3 - 27$;

[1] A $2^{2^n} + 1$ alakú egészeket Fermat-számoknak nevezzük.

(c) $\sum_{0 \leqslant i \leqslant 8} n^i$;

(d) $n^4 + 4$;

(e) $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$;

(f) $n^2 - n + 41$.

50. Vannak-e olyan a, b, c, d természetes számok, amelyekre $ab = cd$ és $a + b + c + d$ prímszám.

51. Adott 1 és $(2n-1)^2$ között n darab egymáshoz páronként relatív prím egész szám. Mutassuk meg, hogy az adott számok között van prímszám.

52. Legyenek a és b olyan egészek, amelyekre $1 \leqslant a, b \leqslant 9$ teljesül. Mutassuk meg, hogy az

$$ab_{(10)}, aab_{(10)}, \ldots, aaab_{(10)}, \ldots$$

számok között végtelen sok összetett szám van.[2]

53. Igaz-e, hogy a tizes számrendszerben felírt bármely természetes szám csupán egyetlen számjegyének megváltoztatásával prímszámmá alakítható?

---

[2]Ha $n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant s} a_k t^k$, akkor az n természetes szám t-alapú számrendszerbeli alakja $a_1 \ldots a_{n(t)}$.