## Kötelező házi feladat(ok)

**2.** Határozzuk meg a $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto \left[\frac{z}{5}\right]$ leképezés magját. Adjuk meg a Ker($\varphi$)-hez tartozó osztályozás egy reprezentánsrendszerét.

**3.** Rajzoljuk le az összes 2-, 3-, illetve 4-pontú Hasse-diagramot.

**4.** Legyen $k$ tetszőleges természetes szám. Definiáljuk az

$$\mathbb{N}^k = \{(a_1,\ldots,a_k) \mid a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{N}\}$$

halmazon a $\sqsubseteq$ relációt az alábbi módon. Legyen $(a_1,\ldots,a_k)$, $(b_1,\ldots,b_k) \in \mathbb{N}^k$, ekkor $(a_1,\ldots,a_k) \sqsubseteq (b_1,\ldots,b_k)$ pontosan akkor teljesül, ha vagy $a_i = b_i$ $(i = 1,\ldots,k)$, vagy van olyan $i_0 \in \{1,\ldots,k\}$, amelyre teljesül, hogy $a_1 = b_1,\ldots,a_{i_0} = b_{i_0}$ és $a_{i_0+1} < b_{i_0+1}$. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{N}^k;\sqsubseteq)$ részbenrendezett halmaz.

## Házi feladat(ok)

**5.** Mutassuk meg, hogy ha $m > 2$ egész szám, akkor $2^n+1$ sohasem osztható $(2^m-1)$-gyel.

**6.** Mutassuk meg, hogy a $\left\{[2^k\sqrt{2}] : k \in \mathbb{N}\right\}$ halmazban végtelen sok összetett szám van.

**7.** Adott $2k+1$ darab ($k$ természetes szám) pozitív egész szám, melyek szorzatának $k$ különböző prímosztója van. Mutassuk meg, hogy a számok között van néhány olyan, amelyek szorzata köbszám.

## Oszthatóság

**9.** Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat:

(a) $9 \mid 10^{18}+8$; (b) $72 \mid 10^{16}+8$;

(c) $31 \mid 5^{17}+6$; (d) $18 \mid 17^{19}+19^{17}$.

**10.** Határozzuk meg a felírt szám hiányzó számjegyeit (10-es számrendszerben) úgy, hogy teljesüljön az alábbi oszthatóság. Valamennyi megoldást keressük meg.

(a) $36 \mid 52x2y$; (b) $45 \mid 24x68y$;

(c) $99 \mid 62xy427$ (d) $1155 \mid xxyzzuv$ és $2 \nmid x,y,z,u,v$.

**11.** Mutassuk meg, hogy a következő számok összetettek.

(a) $10^6 - 5^7$; (b) $10^{10} - 7$

(c) $4^{20} - 1$; (d) $1\,000\,027$;

(e) $347\,777\,743$;

(f) $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$;

(g) $512^3 + 675^3 + 720^3$;

(h) $19 \cdot 8^n + 17$ $(n \in \mathbb{N})$.

**12.** Melyik az az ötjegyű szám, amely egyenlő számjegyei szorzatának 45-szörösével?

**13.** Határozzuk meg azokat az $n$ természetes számokat, amelyekre $n+4$ osztója $n^2+8n+15$-nek.

**14.** Tegyük fel, hogy az $a, b, c$ egész számokra teljesül az $a+b+c = (a-b)(b-c)(c-a)$ egyenlőség. Mutassuk meg, hogy $27 \mid a+b+c$.

## Legnagyobb közös osztó

**15.** Határozzuk meg mindazokat az $a, b$ természetes számokat, amelyekre ln.k.o.$(a, b) = 22$ és lk.k.t.$(a, b) = 264$.

**16.** Mely $c, d$ természetes számokra oldható meg az

$$\text{ln.k.o.}(a, b) = c,$$
$$\text{lk.k.t.}(a, b) = d.$$

egyenletrendszer a természetes számok halmazán? Hány megoldás van?

**17.** Határozzuk meg az $F_{2007}$ és $F_{2008}$ Fibonacci-számok[1] legnagyobb közös osztóját.

**18.** Legyenek $a$ és $b$ tetszőleges egész számok. Mutassuk meg, hogy $7 \mid 10a + b$ pontosan akkor teljesül, ha $7 \mid a - 2b$. Ennek segítségével döntse el, hogy a 28210392 természetes szám osztható-e 7-tel.

**19.** Legyenek $a, b$ és $k, l$ tetszőleges természetes számok. Mutassuk meg, hogy ha $a^k$ és $b^l$ relatív prímek egymáshoz, akkor $a$ és $b$ is relatív prímek egymáshoz.

**20.** Határozzuk meg a 234 és 432 egészek legnagyobb közös osztóját és oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket:

(a) $234x + 432y = 6564$;

(b) $234x - 432y = 6570$.

**21.** Mely $n$ természetes számokra lehet egyszerűsíteni a $\frac{7n+5}{9n-2}$ törtet?

**22.** Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt zsákmányolt. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak feletti vitában egy kalózt véletlenül megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, és most tíz arany maradt ki. Az e feletti vitában egy újabb kalóz távozott az élők sorából. Ezután már el tudták osztani az aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénz volt a zsákban?

**23.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a, b, c$ egész számokra, ha ln.k.o.$(b, c) = 1$, akkor ln.k.o.$(a, bc)$ =ln.k.o.(a,b)ln.k.o.$(a, c)$.

**24.** Mutassuk meg, hogy az $\dfrac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ tört nem egyszerűsíthető, ha $|a_1b_2 - a_2b_1| = 1$.

**25.** Határozzuk meg a $2072x + 1813y = 2849$ diofantoszi egyenlet általános megoldását.

**26.** Határozzuk meg a $19x+20y = 1909$ diofantoszi egyenlet azon megoldásait, amelyekre $x, y > 0$ teljesül.

[1] A Fibonacci-számokat az alábbi rekurzióval definiáljuk: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$.

## Prímfaktorizáció $\mathbb{Z}$-ben

**27.** Miért nem lehet 1991 két prímszám összege?

**28.** Legyen $p > 3$ prímszám. Mutassuk meg, hogy $24 \mid p^2 - 1$.

**29.** Mutassuk meg, hogy ha $p$ és $p^2 + 8$ prímszámok, akkor $p^2 + p + 1$ is az.

**30.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $m$ és $n$ természetes számokra

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

egész szám.

**31.** Jelölje $\mathcal{E}$ a páros egészek halmazát. Azt mondjuk, hogy $a \in \mathcal{E}$ osztja $b \in \mathcal{E}$-t, ha van olyan $c \in \mathcal{E}$, amelyre $b = ca$ teljesül. A $q \in \mathcal{E}$ elemet felbonthatatlannak nevezzük, ha nincsenek olyan $a, b \in \mathcal{E}$ elemek, amelyekre $q = ab$ teljesül.

(a) Mik a felbonthatatlan elemek $\mathcal{E}$-ben?

(b) Igaz-e, hogy egy 0-tól különböző $\mathcal{E}$-beli elem vagy felbonthatatlan, vagy felbonthatatlan elemek szorzatára bontható?