Klasszikus Algebra és Számelmélet

(1.) ‘Feladatsor’ 2009/2010. tavaszi félév

Kötelező házi feladat(ok)

1. Injektív-e, szürjektív-e, illetve bijektív-e az

$$f\colon S \times S \to \{r \in \mathbb{R} \mid r \geqslant 0\},\ (P,Q) \mapsto d(P,Q)$$

leképezés, ahol S egy sík pontjainak halmaza és $d(P,Q)$ a P és Q pontok távolsága?

Házi feladat(ok)

1. Bizonyítsuk be, hogy az $f\colon A \to B$ leképezés akkor és csak akkor szürjektív, valahányszor $g\colon B \to C$ és $g'\colon B \to C$ olyan leképezések, hogy $f \circ g = f \circ g'$, mindannyiszor $g = g'$.

2. Legyen $F \subseteq X \times Y$ megfeleltetés. Bizonyítsuk be, hogy F akkor és csak akkor leképezés $F \circ F^{-1} \supseteq \omega_X$ és $F^{-1} \circ F \subseteq \omega_Y$.

3. Igazoljuk, hogy ha egy $\varrho \subseteq A \times A$ reláció reflexív, és tetszőleges $a, b, c \in A$ esetén $(a,b) \in \varrho$, $(b,c) \in \varrho$ fennállásából $(c,a) \in \varrho$ következik, akkor ϱ ekvivalenciareláció.

4. Legyen ϱ reflexív és tranzitív reláció az A halmazon. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\sigma = \varrho \cap \varrho^{-1}$ ekvivalenciareláció,

(b) az A/σ halmazon részbenrendezés az a $\widetilde{\varrho}$ reláció, amelyet a

$$(C, C') \in \widetilde{\varrho} \Longleftrightarrow \text{vannak olyan } a \in C \text{ és } a' \in C' \text{ elemek, hogy } (a,a') \in \varrho$$

összefüggés definiál ($C, C' \in A/\varrho$).

Leképezések

1. Az alábbi leképezések közül melyek injektívek, illetve szürjektívek?

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$,

(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ x \mapsto x^4$,

(c) $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2x)$,

(d) $\delta\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x + y$,

(e) $\varepsilon\colon S \to S,\ P \mapsto P$-nek f-re vonatkozó tükörképe, ahol S egy sík pontjainak a halmaza, f pedig ezen sík egy rögzített egyenese.

Ekvivalenciarelációk

2. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi relációk közül melyik reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotóm. Ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalenciareláció. Adjuk meg az ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást és állítsuk elő őket, mint alkalmas leképezés magjait. A ζ és η relációk esetén L egy sík összes egyeneseinek halmazát jelöli.

(a) $\alpha = \{(a,b) : a/b \leqslant b/a\} \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(b) $\beta = \big\{\big((a,b),(c,d)\big) : a+d = b+c\big\} \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$;

(c) $\gamma = \{(a,b) : |a-b| \text{ páros}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(d) $\delta = \{(a,b) : |a-b| \text{ páratlan}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(e) $\varepsilon = \{(a,b) : a^2 - b^2 = b - a\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(f) $\zeta = \{(a,b) : a \perp b\} \subseteq L \times L$;

(g) $\eta = \{(a,b) : a \parallel b \text{ vagy } a = b\} \subseteq L \times L$;

(h) $\vartheta = \{(a,b) : ab + 1 = a + b\} \cup \omega_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(i) $\iota = \{(a,b) : a^2 + b^2 = -1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Legyen A tetszőleges halmaz. Melyek azok a relációk az A halmazon, amelyek egyszerre szimmetrikusak és asszimmetrikusak?

4. Hány különböző osztályozása van egy 1-, 2-, 3-, illetve 4-elemű halmaznak?

Részbenrendezések

5. Legyen ϱ részbenrendezés az A halmazon. Azt mondjuk, hogy ϱ **felfelé irányított**, ha tetszőleges $a, b \in A$ elemekhez van olyan $c \in A$, amelyre $a\varrho c$ és $b\varrho c$. Döntsük el, hogy az alábbi részbenrendezések felfelé írányítottak-e.

(a) $(\mathbb{N}; \leqslant)$, $(\mathbb{N}; \mid)$;

(b) $(\mathbb{N}^k; \sqsubseteq)$, ahol $(a_1, \ldots, a_k) \sqsubseteq (b_1, \ldots, b_k)$ pontosan akkor teljesül, ha $a_i = b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ vagy van olyan i_0 index $(1 \leqslant i_0 \leqslant k)$, amelyre $a_{i_0} < b_{i_0}$ és $a_i = b_i$ $(i < i_0)$.

6. Legyen $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k < 36 \text{ és } k \mid 36\}$. Rajzoljuk fel az $(A; \mid)$ részbenrendezetthalmaz Hasse-diagramját.

7. Legyen $A = P(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}$. Rajzoljuk fel az $(A; \subseteq)$ és $(A; \supseteq)$ részbenrendezetthalmazok Hasse-diagramját.

8. Rajzoljuk fel az $(A; \leqslant)$ részbenrendezetthalmaz Hasse-diagramját, ahol $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$.