KLASSZIKUS ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET FELADATOK

(a rutinfeladatokat $^{\circ}$ jelzi)

Leképezések, relációk

1. feladat$^{\circ}$ Adja meg az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ alaphalmazon értelmezett

$$\rho = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ nem relatív prím}\} \subseteq A \times A$$

ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozást.

2. feladat Hány ekvivalenciareláció adható meg egy kételemű alaphalmazon? És három- illetve négyelemű halmazon?

3. feladat Megadható-e egy 8 elemű alaphalmazon olyan ekvivalenciareláció, amely pontosan 40 elempárból áll? És olyan, ami pontosan 41 elempárból áll?

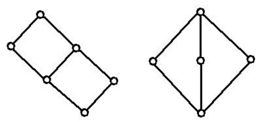
4. feladat$^{\circ}$ Adja meg a $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto \left[\frac{n}{3}\right]$ leképezés magjához tartozó osztályozást.

5. feladat Igazolja, hogy bármely leképezés előáll egy szürjektív és egy injektív leképezés szorzataként.

6. feladat$^{\circ}$ Rajzolja fel az $(A; |)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját, és határozza meg a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemeket, ahol $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

7. feladat Rajzolja le az összes $2, 3$ illetve 4 pontú Hasse-diagramot.

8. feladat Van-e olyan n természetes szám, amelyre n pozitív osztóinak (beleértve az 1-et és magát n-et is) Hasse-diagramja a következő? Hány megoldás van? (A részbenrendezési reláció természetesen az oszthatóság.)



a **b**

9. feladat Rajzoljon olyan Hasse-diagramot, amelyben egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

10. feladat Jelölje $\mathrm{Eq}(A)$ az A halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk halmazát. Az ekvivalenciarelációk is halmazok, ezért van értelme megkérdezni, hogy egy ekvivalenciareláció részhalmaza-e egy másiknak. Tehát az $\mathrm{Eq}(A)$ halmazon a $\subseteq$ reláció részbenrendezés. Rajzolja fel $A = \{a, b\}$ illetve $A = \{a, b, c\}$ esetén ennek a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját. (Útmutatás: Célszerű az ekvivalenciák helyett az osztályozásokat tekinteni. Elég egy pillantást vetni az osztályozásokra és máris látjuk, hogy az egyik ekvivalencia része-e a másiknak. Hogyan?)

11. feladat Mi az $(\mathrm{Eq}(A); \subseteq)$ részbenrendezett halmaz legkisebb eleme? És mely ekvivalenciarelációk vannak közvetlenül a legkisebb elem fölött? (Lásd az előző feladat jelöléseit és útmutatását.)

12. feladat Melyek azok a relációk, amelyek egyszerre szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is?

Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, prímfaktorizáció az egész számok körében

13. feladat$^{\circ}$ Határozza meg mindazokat az a, b természetes számokat, amelyekre $(a, b) = 22$ és $[a, b] = 264$ teljesül.

14. feladat Mely $c, d \in \mathbb{N}$ esetén oldható meg az $[a, b] = c$, $(a, b) = d$ egyenletrendszer a természetes számok halmazán? Hány megoldás van?

15. feladat Határozza meg mindazokat az a, b természetes számokat, amelyekre $[a, b] = 720$ és $a + b = 98$.

16. feladat Bizonyítsa be, hogy bármely p prímszámra és $k < p$ pozitív egészre $\binom{p}{k}$ osztható p-vel.

17. feladat Mutassa meg, hogy $2^n - 1$ csak akkor lehet prím, ha n is az. (Mersenne-prímek)

18. feladat Mutassa meg, hogy $2^n + 1$ csak akkor lehet prím, ha n kettőhatvány. (Fermat-prímek)

19. feladat Mely p prímszámokra lesz $29p + 1$ négyzetszám?

20. feladat Legyenek a és b pozitív egész számok, amelyekre $a^3 = b^2$ teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor létezik olyan k pozitív egész, amelyre $a = k^2$ és $b = k^3$.

21. feladat Igazolja, hogy $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$ teljesül minden a, b egész számra. Adjon ennek segítségével eljárást nagy számok 7-tel való oszthatóságának eldöntésére. Például oszható-e 7-tel 334989655?

22. feladat Egy négyjegyű számmal osztva 25707 32-t, 37568 pedig 43-at ad maradékul. Melyik ez a négyjegyű szám?

23. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki az euklideszi algoritmussal 126 és 438 legnagyobb közös osztóját, majd adjon meg olyan x, y egész számokat, amelyekre $126x + 438y = (126, 438)$.

24. feladat Mennyi lehet két szomszédos Fibonacci-szám legnagyobb közös osztója?

25. feladat Határozza meg az $a = 99999999$ és a $b = 999\ldots99$ (száz darab 9-es) számok legnagyobb közös osztóját.

26. feladat Hogyan lehetne általánosítani az előző feladatot?

27. feladat Mely n természetes számok esetén lehet egyszerűsíteni a $\frac{3n+2}{4n+1}$ törtet?

28. feladat$^{\circ}$ Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást határozza meg, ne csak egyet!)

29. feladat Száz szál virágot vásároltunk három különböző fajtából, összesen 30000 forintért. Az egyes virágfajták ára darabonként rendre $130, 190$ és 320 forint. Mennyit vettünk az egyes fajtákból?

Számelméleti kongruenciák

30. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be kongruenciák segítségével (teljes indukció nélkül), hogy $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ osztható 133-mal minden n természetes számra.

31. feladat Határozza meg $7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{4000}$ utolsó két számjegyét.

32. feladat Bizonyítsa be, hogy a tízes számrendszerben felírt $\overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0}$ szám akkor és csak akkor osztható 37-tel, ha az

$$\overline{a_1 a_0} - \overline{a_2 a_2} + \overline{a_4 a_3} - \overline{a_5 a_5} + \cdots$$

szám osztható 37-tel. Döntse el ennek segítségével, hogy oszható-e 37-tel 334989655?

33. feladat Mutassa meg, hogy ha m páratlan prímhatvány, akkor az $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$ kongruenciának csak két megoldása van: $x \equiv \pm 1 \pmod{m}$. Igaz marad-e az állítás, ha m nem prímhatvány?

34. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $24x \equiv 84 \pmod{45}$ kongruenciát. (A megoldásokat az eredeti modulus szerint kell megadni!) Hány megoldás van modulo 45?

35. feladat Milyen számjegyeket kell írni a és b helyére, hogy $1456ab$ osztható legyen 41-gyel?

36. feladat Mennyit ad 73-mal osztva x maradékul, ha $x^{99} \equiv 22 \pmod{73}$ és $x^{100} \equiv 69 \pmod{73}$?

37. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $4x \equiv 7 \pmod{9}, 10x \equiv 4 \pmod{12}$ kongruenciarendszert.

38. feladat$^{\circ}$ Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak? (Segítség: ez egy ókori kínai probléma.)

39. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $x \equiv a \pmod{3}, x \equiv b \pmod{5}, x \equiv c \pmod{7}$ paraméteres kongruenciarendszert.

40. feladat Oldja meg a $73x \equiv 1 \pmod{247}$ kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze" az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

41. feladat Melyek azok a természetes számok, amelyek négyzete tízes számrendszerben 29-re végződik? (Akárcsak az előző feladatnál, itt is használható a kínai maradéktétel.)

42. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad maradékul 31-gyel osztva $33 \cdot \ldots \cdot 59$?

43. feladat Mutassa meg, hogy ha $n > 4$ összetett szám, akkor $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$. (Ebből következik, hogy Wilson tételének a megfordítása is igaz.)

44. feladat Bizonyítsa be, hogy $(2p-1)! - p$ osztható p^2-tel bármely p prímszám esetén.

45. feladat$^{\circ}$ Teljes maradékrendszer-e $1, 11, 21, 31, \ldots, 751, 761$ modulo 77?

46. feladat$^{\circ}$ Redukált maradékrendszer-e $15, 35, 55, \ldots, 315$ modulo 32?

47. feladat Adjon meg olyan egész számokat, amelyek teljes maradékrendszert alkotnak modulo 8, és egyúttal redukált maradékrendszert alkotnak modulo 15.

48. feladat$^{\mathrm{O}}$ Mennyit ad 40-nel osztva maradékul 13^{158}?

49. feladat$^{\mathrm{O}}$ Mennyit ad 53-mal osztva maradékul $80^{\left(111^{50}\right)}$?

50. feladat Mennyit ad héttel osztva maradékul $11^{11} + 11^{11^2} + 11^{11^3} + \cdots 11^{11^{11}}$?

51. feladat Mennyit ad héttel osztva maradékul $111\ldots111$ (99 egyes)?

52. feladat Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes szám esetén az n, n^8-1, n^8+1 számok közül az egyik osztható 17-tel.

53. feladat Mutassa meg, hogy ha $(a, 100) = 1$, akkor $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ teljesül. Hasonlítsa össze ezt az állítást az Euler-Fermat–tétellel.

54. feladat Igazolja, hogy $a^{561} \equiv a \pmod{561}$ bármely a egész számra.

55. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van olyan többszöröse, ami csak 9-es számjegyekből áll.

56. feladat Igazolja, hogy bármely p páratlan prímszámra $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$.

Számelméleti függvények

57. feladat$^{\mathrm{O}}$ Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 25 osztója van?

58. feladat$^{\mathrm{O}}$ Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\sigma(n) = 307$?

59. feladat$^{\mathrm{O}}$ Oldja meg a $\mu(x) + 2 = \mu(6x)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

60. feladat Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\varphi(n) = 1210$?

61. feladat Igazolja, hogy az $n = 1, 2$ esetek kivételével $\varphi(n)$ sosem páratlan.

62. feladat Oldja meg a $\varphi(2n) = n$ egyenletet a természetes számok halmazán.

63. feladat Oldja meg a $\varphi(n) = n - 2$ egyenletet a természetes számok halmazán.

64. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számra teljesül a $\varphi\left(n^2\right) = n\varphi(n)$ egyenlőség.

65. feladat Melyek azok a természetes számok, amelyeknek páratlan sok osztójuk van?

66. feladat Mutassa meg, hogy az n szám osztóinak szorzata $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

67. feladat Igazolja, hogy minden n természetes számra $\tau(n) + \varphi(n) \leq n + 1$. Mikor áll fenn egyenlőség?

68. feladat Bizonyítsa be, hogy $3 \mid \sigma(3n-1)$ minden n természetes számra.

69. feladat Oldja meg a $\sigma(n) = n + 3$ egyenletet a természetes számok halmazán.

70. feladat Oldja meg az $n + \tau(n) = \sigma(n)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

71. feladat Mennyi lehet n értéke, ha $\varphi(n) = 40$, és $\sigma(n) = n + 1$?

72. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n páratlan szám, akkor $\mu\left(n^2+3\right) = 0$.

73. feladat$^{\mathrm{O}}$ Jelölje az f gyengén multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvényét F. Határozza meg $F(45)$ értékét, ha $f(3) = 2, f(5) = 7, f(45) = 21$.

74. feladat$^{\mathrm{O}}$ Jelölje az előző feladatbeli f függvény megfordítási függvényét $\mathfrak{f}$. Határozza meg $\mathfrak{f}(45)$ értékét.

75. feladat Határozza meg a $\rho(n) = \frac{1}{n}$ számelméleti függvény összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

76. feladat Határozza meg a

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n = p^\alpha \ (p \text{ prímszám}) \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem prímhatvány} \end{cases}$$

képlettel definiált számelméleti függvény (Mangoldt-féle függvény) összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

77. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számra $\sum\limits_{d \mid n} \tau(d) \frac{n}{d} = \sum\limits_{d \mid n} \sigma(d)$. (Útmutatás: Igazoljuk, hogy mind a bal-, mind a jobboldal gyengén multiplikatív számelméleti függvényt határoz meg. Ezután elegendő prímhatványokra igazolni az egyenlőséget.)

78. feladat Adjon új (egyszerűbb) megoldást az előző feladatra a konvolúció műveletének asszociativitására támaszkodva.

Absztrakt algebrai struktúrák

79. feladat$^{\circ}$ Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z},\ a \text{ páros}\}$$

80. feladat$^{\circ}$ Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\big) = \big\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\big\}$$

81. feladat$^{\circ}$ Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Z}\,[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\} \qquad \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

82. feladat Mutassa meg, hogy tetszőleges nemüres $S \subseteq \mathbb{R}$ esetén ekvivalens az alábbi két feltétel.
(1) $\forall a, b \in S : a + b \in S$ és $-a \in S$
(2) $\forall a, b \in S : a - b \in S$

83. feladat Legyen $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ egy gyöke az $x^2 + px + q$ polinomnak, ahol p és q egész számok. Mutassa meg, hogy ekkor a $\mathbb{Z}\,[\xi] = \{a + b\xi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz integritástartományt alkot a szokásos összeadással és szorzással.

84. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}\,[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd a 81. feladatot).

85. feladat Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

86. feladat Definiáljunk egy újfajta összeadást és egy újfajta szorzást a valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a + b - 1$ és $a \odot b = a + b - ab$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ struktúra test.

87. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges c pozitív konstans esetén a $(-c, c)$ intervallum csoportot alkot az alábbi $\otimes$ művelettel.

$$x \otimes y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{c^2}}$$

88. feladat Szorozza össze az alábbi két polinomot (vagyis adja meg tetszőleges n-re x^n együtthatóját az fg polinomban.

$$f = x^{100} + x^{99} + \cdots + x^2 + x + 1$$
$$g = 100x^{100} + 99x^{99} + \cdots + 2x^2 + x$$

89. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\mathbb{Z}_{13}$ testben a $\overline{8} + \overline{11}$, $\overline{8} - \overline{11}$, $\overline{8} \cdot \overline{11}$, $\overline{11}/\overline{8}$, $\overline{8}^{11}$, $\overline{11}^{-10}$ elemeket. (Az eredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{12}$ valamelyike legyen.)

90. feladat Keresse meg az $x^3 = \overline{1}$ egyenlet összes megoldását a $\mathbb{Z}_5$, illetve a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

Komplex számok

91. feladat$^{\circ}$ Trigonometrikus alakban számolva számítsa ki az alábbi z komplex szám értékét. (A végeredményt adja meg kanonikus alakban is.)

$$\frac{(-1 + i)^{2422}}{\big(\sqrt{3} + i\big)^{1208}}$$

92. feladat Fejezze ki $\cos nx$-et $\cos x$ és $\sin x$ segítségével. (Útmutatás: Számítsuk ki a $(\cos x + i \sin x)^n$ hatványt trigonometrikus és kanonikus alakban is, majd hasonlítsuk össze a két eredményt.)

93. feladat Adjon zárt formulát az alábbi összegre.

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots$$

94. feladat Oldja meg a $z^2 + 4\bar{z} = |z|^2 + 6$ egyenletet a komplex számok halmazán.

95. feladat Oldja meg az $i\bar{z} = z^2$ egyenletet a komplex számok halmazán.

96. feladat Mutassa meg, hogy

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

97. feladat Rajzoljunk egy tetszőleges négyszög oldalaira kifelé négyzeteket. Bizonyítsa be, hogy a szemközti oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek.

98. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$ mind a négy értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

99. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki $\sqrt[3]{i}$ mindhárom értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

100. feladat$^{\circ}$ Ábrázolja a komplex számsíkon a nyolcadik és a tizenkettedik egységgyököket, és írja fel őket trigonometrikus és kanonikus alakban. Mindegyikhez határozza meg azt az n természetes számot, amelyre primitív n-edik egységgyök.

101. feladat$^{\circ}$ Egységgyök-e a $z = \cos\frac{5\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{12}$ komplex szám? Ha igen, akkor határozza meg mindazokat az n kitevőket, amelyekre z n-edik egységgyök, valamint azt az n természetes számot, amelyre z primitív n-edik egységgyök.

102. feladat Határozza meg mindazokat a komplex számokat, amelyek huszonnegyedik és századik egységgyökök is.

103. feladat Hogyan lehetne általánosítani az előző feladatot?

104. feladat Határozza meg az n-edik primitív egységgyökök szorzatát.

105. feladat Mennyi az n-edik egységgyökök k-adik hatványainak összege?

106. feladat Hozza zárt alakra az $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\cdots+n\varepsilon^{n-1}$ összeget, ahol ε egy n-edik egységgyök. (Útmutatás: Szorozzuk be az összeget $1-\varepsilon$-nal.)

107. feladat Határozza meg $\sin 72^\circ$ értékét. (Útmutatás: Tekintsük a $z = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ komplex számot. Ez primitív ötödik egységgyök, így gyöke az $\frac{x^5-1}{x-1} = x^4+x^3+x^2+x+1$ polinomnak. Az $y = x + \frac{1}{x}$ helyettesítéssel az $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ egyenlet másodfokú egyenletre vezethető vissza.)

„Számelmélet” integritástartományokban

108. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $f = x^4+x^3+x^2+\overline{1},\ g = x^3+\overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és adja meg az $fu+gv=(f,g)$ egyenlet egy megoldását.

109. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki az $f = x^4+x^3+2x^2+3x-3,\ g = x^4+x^3+x^2+3x-6$ polinomok legnagyobb közös osztóját, majd ennek segítségével határozza meg f és g közös gyökeit, és végül külön-külön f és g összes gyökét.

110. feladat Határozza meg a $8+i$ és $4-2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

111. feladat Oldja meg az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben az $x^2 \cdot f \equiv x^2 - 2x \pmod{x^3+x}$ kongruenciát. (Figyelem: nem x az ismeretlen, hanem f!)

112. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be, hogy az alábbi I halmaz ideál a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben.

$$I = \{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x] : a_0 \text{ páros}\}.$$

113. feladat Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

114. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be, hogy az alábbi I halmaz ideál a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ gyűrűben.

$$I = \left\{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] : a \equiv b \pmod 2\right\}.$$

115. feladat Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

116. feladat Határozza meg az egész számok gyűrűjében az $I = (18) \cap (30)$ ideált. (Mivel $\mathbb{Z}$ főideálgyűrű, van olyan g egész szám, amelyre $I = (g)$. Ezt a g számot kell megtalálni.) Hogyan lehetne általánosítani?

117. feladat A $(18) \cup (30)$ halmaz nem ideál az egész számok gyűrűjében (ugye?). Melyik az a legszűkebb I ideál, amelyik tartalmazza ezt a halmazt? Hogyan lehetne általánosítani?

118. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges z komplex számra az

$$I = \left\{k \in \mathbb{Z} : z^k = 1\right\}$$

halmaz ideál az egész számok gyűrűjében, továbbá amennyiben z primitív n-edik egységgyök, akkor $I = (n)$.

119. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges α komplex számra az alábbi halmaz ideál a $\mathbb{C}[x]$ gyűrűben.

$$I = \{f \in \mathbb{C}[x] : f(\alpha) = 0\}.$$

120. feladat$^{\circ}$ Írja fel a $\mathbb{Z}_2[x] / \left(x^2+x+1\right)$ négyelemű test összeadó- és szorzótábláját.

121. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $\mathbb{Z}_3[x] / \left(x^2+1\right)$ kilencelemű testben az $a \cdot b,\ a/b,\ b/a$ elemeket, ahol $a = \overline{x}$ és $b = \overline{x+1}$.

122. feladat Határozza meg a 121-elemű test összes elemének összegét. Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?

Test feletti egyhatározatlanú polinomok

123. feladat$^{\circ}$ Adja meg az $x^5+x+\overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

124. feladat$^{\circ}$ Adja meg az $x^4+\overline{2}x^3+\overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

125. feladat Adja meg az $x^p-\overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén. (Fel lehet használni a 16. feladatot.)

126. feladat Adja meg az $x^p-x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.

127. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges T test és tetszőleges $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in T$, $a_0, a_n \neq 0$ elemek esetén az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ is az.

128. feladat$^{\circ}$ Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy osztja-e a $g = x^2+\sqrt{2}x+1$ polinom az $f = x^4+1$ polinomot.

129. feladat$^{\circ}$ Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy teljesül-e a $g \mid f$ oszthatóság a $g = x^2-1$ és $f = x^{17}-x^{16}+x^{15}-x^{14}+x^7-x^3+x-1$ polinomokra a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_7$ testek fölött.

130. feladat Mely n pozitív egészekre osztható az x^n+1 polinom az x^2+1 polinommal?

131. feladat Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $x^2+\overline{1} \mid x^{2008}-\overline{23}x^{1922}+\overline{13}x^{600}+\overline{8}$ teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben.

132. feladat Igazolja, hogy x^2+x+1 akkor és csak akkor osztója az $x^{2n}+x^n+1$ polinomnak, ha n nem osztható 3-mal.

133. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az x^6+27 polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

134. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az x^8-16 polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

135. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az x^4+x^2-30 polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

136. feladat Határozza mega az $x^{100}-1$ és x^8-1 polinomok legnagyobb közös osztóját.

137. feladat Hogyan lehetne általánosítani az előző feladatot?

138. feladat Képzelje el (de ne írja fel!) az $x^{1973}-1997$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{R}$ felett. Hány tényezőt lát (a lelki szemeivel), és hányadfokúak ezek?

139. feladat Határozza meg az egységkörbe írt szabályos tizenkétszög egy csúcsából kiinduló átlók hosszának szorzatát. (Itt most átlónak tekintjük az oldalakat is, tehát egy csúcsból 11 átló indul ki.)

140. feladat Általánosítsa az előző feladatot szabályos n-szögre.

141. feladat$^{\circ}$ Keresse meg az $x^6+2x^5+x^4+22x^3+55x^2+44x+11$ polinom racionális gyökeit, majd adja meg a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilis felbontását.

142. feladat$^{\circ}$ Igazolja, hogy az $x^7-7x^6+24x^5-50x^4+68x^3-57x^2+25x-1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Útmutatás: Térjünk át az $y = x-1$ határozatlanra.)

143. feladat Adja meg az $x^p-1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis felbontását. (Útmutatás: Térjünk át az $y = x-1$ határozatlanra, majd használjuk a 16. feladatot.)

144. feladat$^{\circ}$ Alakítsa át az $f = x^4+8ix^3-26x^2-40ix+21 \in \mathbb{C}[x]$ polinomot az $x+2i$ polinom hatványai szerint rendezett alakba, és az elvégzett átalakítás segítségével határozza meg f gyökeit.

145. feladat$^{\circ}$ Hányszoros gyöke a 2 szám az $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$ polinomnak? Oldja meg a feladatot Horner-elrendezéssel és deriválással is.

146. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az $3x^4-4x^3+1$ polinom többszörös gyökeit, majd adja meg a gyöktényezős felbontását.

147. feladat Az a valós paraméter mely értékeire lesz a -1 kétszeres gyöke az x^5-ax^2-ax+1 polinomnak?

148. feladat Határozza meg a b és c komplex paraméterek értékét úgy, hogy legyen háromszoros gyöke az $x^5-5x^3+5bx+c \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak.

149. feladat Határozza meg az A, B valós paraméterek azon értékeit, amelyekre az 1 kétszeres gyöke az $Ax^n+Bx^{n-1}+1$ polinomnak ($n \geq 2$ tetszőleges adott természetes szám).

150. feladat Mikor osztható egy polinom a saját deriváltjával?

151. feladat Mutassa meg, hogy az $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ polinomnak nincs többszörös gyöke a komplex számok testében.

152. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $x^3+9x-26=0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

153. feladat Oldja meg az $x^3+9x-26=0$ egyenletet a $\mathbb{Z}_{19}$ testben. (A megoldáshoz szükségünk lehet a 90. feladatra.)

154. feladat A derivált vizsgálatával igazolja, hogy az $x^3+px+q\in\mathbb{C}\,[x]$ polinomnak akkor és csak akkor van többszörös gyöke, ha diszkriminánsa nulla.

155. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$ egyenletet a komplex számok halmazán. (Segítség: A kubikus rezolvens egyik gyöke $\alpha=2$.)

156. feladat$^{\circ}$ Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú f polinomot, amelyre $f\,(0)=2,\ f\,(1)=3$ és $f\,(3)=1$.

Többhatározatlanú polinomok, szimmetrikus polinomok, algebrai számok

157. feladat$^{\circ}$ Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $3x^5+6x^4+9x^3+2x^2+4x+1$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.

158. feladat$^{\circ}$ Írja fel az $(x_1+x_2)\,(x_2+x_3)\,(x_3+x_1)$ polinom tagjait lexikografikusan csökkenő sorrendben, majd fejezze ki az elemi szimmetrikus polinomok segítségével.

159. feladat Határozza meg a λ komplex paraméter értékét úgy, hogy az $x^3-7x+\lambda$ polinom egyik gyöke valamelyik másik gyök kétszerese legyen.

160. feladat Határozza meg a p és q komplex paraméterek értékét úgy, hogy az $x^3-px^2+11x-q$ polinom gyökei egymást követő egész számok legyenek.

161. feladat Mutassa meg, hogy $\sqrt{2}+i$ algebrai szám.

162. feladat Mutassa meg, hogy $\pi^2+\pi$ transzcendens szám. (Fel lehet használni azt a tényt, hogy π transzcendens.)

Hatványozás modulo m

163. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki 2 rendjét modulo 21.

164. feladat Legyenek a és m relatív prím természetes számok. Az $\frac{1}{m}$ törtet a alapú számrendszerben felírva egy tiszta szakaszos végtelen a-ados törtet kapunk. Igazolja, hogy a szakasz hossza nem más, mint a rendje modulo m. (Például $a=10$ és $m=7$ esetén $\frac{1}{7}$ tízes számrendszerbeli felírása: $\frac{1}{7}=0,\dot{1}42\,85\dot{7}$, vagyis a szakasz hossza 6, ami ugyanaz, mint 10 rendje modulo 7.)

165. feladat Legyen $p>5$ prímszám, és tegyük fel, hogy $\frac{1}{p}$ tizedestört alakja $0,\dot{a}_1\ldots a_nb_1\ldots\dot{b}_n$, vagyis a szakasz hossza $2n$. Mutassa meg, hogy ekkor az $a_1\ldots a_n+b_1\ldots b_n$ szám csupa 9-es számjegyből áll. (Például $p=7$ esetén $\frac{1}{7}=0,\dot{1}42\,85\dot{7}$, és valóban $142+857=999$.)

166. feladat$^{\circ}$ Mutassa meg, hogy 2 primitív gyök modulo 19, de nem primitív gyök modulo 17.

167. feladat$^{\circ}$ Oldja meg indextáblázat segítségével a $3x^6\equiv1\pmod{11}$ kongruenciát.

168. feladat$^{\circ}$ Oldja meg indextáblázat segítségével a $3\cdot5^x\equiv20\pmod{11}$ kongruenciát.

169. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\left(\frac{173}{181}\right)$ Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználása nélkül.

170. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\left(\frac{103}{151}\right)$ Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználásával.

171. feladat Adjon képletet a $\left(\frac{3}{p}\right)$ Legendre-szimbólumra.

172. feladat Mely p prímszámokra oldható meg az $x^2+x+1\equiv0\pmod{p}$ kongruencia?