Név: ______________________________ ETR azonosító: __________________.SZE

2009. október 12.

1. Zárthelyi dolgozat

Matematikai Struktúrák (MMN103G)

2009/2010. őszi félév

1. Feladat. Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$$\begin{aligned} \varphi &: A \to A,\ x \mapsto \lfloor x/2 \rfloor\,, \\ \psi &: A \to A,\ x \mapsto \lfloor (x+2)/3 \rfloor\,. \end{aligned}$$

valamint legyen $\alpha = \ker(\varphi)$ és $\beta = \ker(\psi)$.

(a) Igaz-e, hogy $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$?

(b) Határozza meg az $A/(\alpha \wedge \beta)$ és $A/(\alpha \vee \beta)$ faktorhalmazokat.

Megoldás. Az α és β ekvivalenciarelációk a következők:

$$\begin{aligned} \alpha &= \ker(\varphi) = \{0,1\}^2 \cup \{2,3\}^2 \cup \{4\}^2, \\ \beta &= \ker(\psi) = \{0\}^2 \cup \{1,2,3\}^2 \cup \{4\}^2. \end{aligned}$$

(a) Mivel $0\,\alpha\,1\,\beta\,2$, ezért $(0,2) \in \alpha \circ \beta$. Tegyük fel, hogy $(0,2) \in \beta \circ \alpha$. Ekkor van olyan $c \in A$, amelyre $(0,c) \in \beta$ és $(c,2) \in \alpha$. Ez azonban nem lehetséges, mivel

$$\begin{aligned} (0,c) \in \beta &\iff c = 0, \\ (c,2) \in \alpha &\iff c \in \{2,3\}. \end{aligned}$$

Azaz $(0,2) \notin \beta \circ \alpha$, így $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

(b) Mivel $\alpha \wedge \beta = \alpha \cap \beta = \{0\}^2 \cup \{1\}^2 \cup \{2,3\}^2 \cup \{4\}^2$, ezért $A/(\alpha \wedge \beta) = \{\{0\}, \{1\}, \{2,3\}, \{4\}\}$. Az világos, hogy $\alpha, \beta \subseteq \{0,1,2,3\}^2 \cup \{4\}^2$, így $\alpha \vee \beta \subseteq \{0,1,2,3\}^2 \cup \{4\}^2$. Mivel $(1,a) \in \alpha \cup \beta \subseteq \alpha \vee \beta$ ($a \in \{0,1,2,3\}$), ezért $\{0,1,2,3\}^2 \subseteq \alpha \vee \beta$. Így $\alpha \vee \beta = \{0,1,2,3\}^2 \cup \{4\}^2$. Azaz $A/(\alpha \vee \beta) = \{\{0,1,2,3\}, \{4\}\}$.

2. Feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d, e\}$, és tekintsük az

$$\begin{aligned} \alpha &= \{a,b\}^2 \cup \{c,d\}^2 \cup \{e\}^2, \\ \beta &= \{a\}^2 \cup \{b,c,d\}^2 \cup \{e\}^2 \end{aligned}$$

ekvivalenciarelációkat $\mathrm{Eq}(A)$-ban. Adjon meg olyan γ ekvivalenciarelációt az A halmazon, amelyre

$$\alpha \wedge \gamma = 0_A \quad \text{és} \quad \alpha \vee \gamma = 1_A$$

teljesül $\mathrm{Eq}(A)$-ban. Van-e olyan $\delta \in \mathrm{Eq}(A)$, amely α-nak és β-nak is komplementuma?

Megoldás. Tekintsük a $\gamma = \{a,c,e\}^2 \cup \{b\}^2 \cup \{d\}^2$ ekvivalenciarelációt. Ekkor

$$\alpha \wedge \gamma = \alpha \cap \gamma = 0_A \quad \text{és} \quad \beta \wedge \gamma = \beta \cap \gamma = 0_A.$$

Valamint tetszőleges $s \in A$-ra $(a,s) \in \alpha \cup \gamma \cup \gamma \circ \alpha \subseteq \alpha \vee \gamma$ és $(b,s) \in \beta \cup \gamma \cup \beta \circ \gamma \subseteq \beta \vee \gamma$ miatt $\alpha \vee \gamma = \beta \vee \gamma = 1_A$. Azaz $\gamma \in \mathrm{Eq}(A)$ az α és β ekvivalenciarelációk közös komplementuma.

3. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha az $(L; \wedge, \vee)$ háló a, b, c, d elemeire $a, b \leqslant c, d$ teljesül, akkor $a \vee b \leqslant c \wedge d$.

Megoldás. Mivel $a, b \leqslant c$, ezért $a \vee b \leqslant c$, valamint $a, b \leqslant d$ miatt $a \vee b \leqslant d$. Így $a \vee b \leqslant c, d$ következtében $a \vee b \leqslant c \wedge d$.

4. Feladat. Legyen $A=\{a,b,c,d\}$ és $\mathbf{A}=(A;*)$, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	c
c	c	b	c	d
d	d	c	d	a

Határozza meg az $\mathbf{A}$ algebra részalgebráinak $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ halmazát, majd rajzolja fel a $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A});\subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.

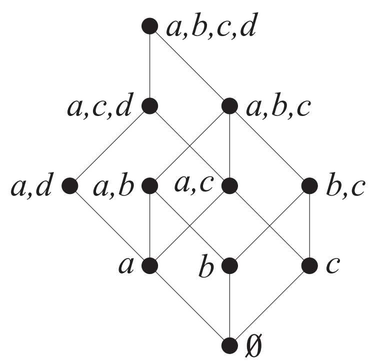
$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Mivel $a^2=a$, $b^2=b$ és $c^2=c$, ezért $\langle a\rangle=a$, $\langle b\rangle=b$ és $\langle c\rangle=c$, valamint $x*y\in\{a,d\}$ $(x,y\in\{a,d\})$ és $d*d=a$ következtében $\langle d\rangle=\{a,d\}$. Az A halmaz tetszőleges X és Y részhalmazaira legyen $X*Y=\{x*y\mid x\in X,\ y\in Y\}$. Világos, hogy H pontosan akkor részalgebrája $\mathbf{A}$-nak, ha $H*H\subseteq H$. Ezért $\{a,b\}*\{a,b\}=\{a,b\}$, $\{a,c\}*\{a,c\}=\{a,c\}$, $\{b,c\}*\{b,c\}=\{b,c\}$ miatt $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ és $\{b,c\}$ is részalgebra. Ezek után vizsgáljuk meg azokat a részalgebrákat, amelyek d-t is tartalmazzák. Ha H részalgebra $\mathbf{A}$-ban és $d\in H$, akkor $a\in H$. Így

$$\begin{aligned}\langle a,d\rangle\ni a=d*d,\ d&\Longrightarrow\langle a,d\rangle=\{a,d\},\\ \langle b,d\rangle\ni a=d*d,\ b,\ c=b*d,\ d&\Longrightarrow\langle b,d\rangle=A,\\ \langle c,d\rangle\ni a=d*d,\ c,\ d \text{ és } \{a,c,d\}*\{a,c,d\}=\{a,c,d\}&\Longrightarrow\langle c,d\rangle=\{a,c,d\},\end{aligned}$$

továbbá

$$\langle a,b,d\rangle\supseteq\langle b,d\rangle=A\Longrightarrow\langle a,b,d\rangle=A.$$

A fentiekből adódik, hogy $\mathbf{A}$ részalgebrái a következők: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,c,d\}$ és A. A $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A});\subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja pedig a következő:



1. ábra.

(Az 1. ábrán $x,\dots,z$ jelöli az $\{x,\dots,z\}$ halmazt.)

5. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A}=(A;f)$ monounér algebra részalgebráinak $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $A=\{1,2,3,4,5\}$ és $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&2&5&4\end{pmatrix}$.

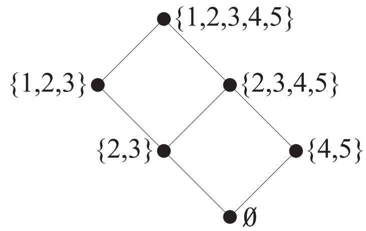
$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az f leképezés gráfja a következő:

Először vizsgáljuk meg az egy elem által generált részalgebrákat:

$$\begin{aligned}\langle 1\rangle&=\{1f,(1f)f,((1f)f)f,\dots\}=\{1,2,3\},\\ \langle 2\rangle&=\{2f,(2f)f,((2f)f)f,\dots\}=\{2,3\},\\ \langle 3\rangle&=\{3f,(3f)f,((3f)f)f,\dots\}=\{2,3\},\\ \langle 4\rangle&=\{4f,(4f)f,((4f)f)f,\dots\}=\{4,5\},\\ \langle 5\rangle&=\{5f,(5f)f,((5f)f)f,\dots\}=\{4,5\}.\end{aligned}$$

Legyen $B=\{1,2,3\}$ és $C=\{4,5\}$. Gondoljuk meg a következőt: $H\subseteq A$ pontosan akkor részalgebra $\mathbf{A}$-ban, ha $H\cap B$ és $H\cap C$ is részalgebra $\mathbf{A}$-ban. Így $H\cap B\in\{\emptyset,\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ és $H\cap C\in\{\emptyset,\{4,5\}\}$ miatt

A részalgebrái a következők: $\emptyset$, $\{2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4,5\}$ és A. A $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A});\subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja pedig a következő:



2. ábra.

---

6. Feladat. Legyen $\mathbf{L} = (L;\wedge,\vee)$ háló. Mutassa meg, hogy ha $(L;\wedge,\sqcup)$ is háló, akkor bármely $a, b \in L$-re $a \vee b = a \sqcup b$ teljesül.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Legyen $(L;\leqslant_1)$, illetve $(L;\leqslant_2)$ az $(L;\wedge,\vee)$, illetve $(L;\wedge,\sqcup)$ hálóhoz tartozó hálószerű részbenrendezés. Ekkor

$$a \leqslant_1 b \Longleftrightarrow a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \leqslant_2 b$$

miatt $\leqslant_1 = \leqslant_2$. Legyen a és b tetszőleges elemei A-nak. Ekkor az (egyik) abszorptív azonosságot alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge b = b &\Longrightarrow a \vee b \leqslant_1 b \Longleftrightarrow a \vee b \leqslant_2 b,\\ (a \vee b) \wedge a = a &\Longrightarrow a \vee b \leqslant_1 a \Longleftrightarrow a \vee b \leqslant_2 a.\end{aligned}$$

Így $a \vee b \leqslant a \sqcup b$. Valamint,

$$\begin{aligned}(a \sqcup b) \wedge b = b &\Longrightarrow a \sqcup b \leqslant_2 b \Longleftrightarrow a \sqcup b \leqslant_1 b,\\ (a \sqcup b) \wedge a = a &\Longrightarrow a \sqcup b \leqslant_2 a \Longleftrightarrow a \sqcup b \leqslant_1 a.\end{aligned}$$

Így $a \sqcup b \leqslant a \vee b$ is teljesül, azaz $a \vee b = a \sqcup b$.

Valamennyi feladat 10 pontot ér. A dolgozat értékelésénél a 100% = 50 pont egyenlőséget fogom figyelembe venni. Jó munkát kívánok!