6. Feladatsor

Matematikai Struktúrák (MMN103G)

2009/2010. őszi félév

Homomorfizmusok

Legyenek $\mathbf{A} = (A; F)$ és $\mathbf{B} = (B; G)$ algebrák, $\varphi\colon A \to B$ leképezés. Azt mondjuk, hogy φ homomorfizmus az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ algebrák között, ha van olyan $\mathfrak{m}\colon F \to G$ aritásőrző* bijekció, hogy tetszőleges $f \in F$-re (az f művelet legyen n-változós) és tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in A$-ra

$$(f(a_1, \ldots, a_n))\varphi = (\mathfrak{m}(f))(a_1\varphi, \ldots, a_n\varphi)$$

teljesül. A következő elnevezések használatosak:

$$\begin{aligned} \textbf{beágyazás}: &\ \text{injektív homomorfizmus,} \\ \textbf{izomorfizmus}: &\ \text{bijektív homomorfizmus,} \\ \textbf{endomorfizmus}: &\ \varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A} \text{ homomorfizmus,} \\ \textbf{automorfizmus}: &\ \varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A} \text{ izomorfizmus.} \end{aligned}$$

Ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ algebrák grupoidok, pl. $F = \{*\}$ és $G = \{\star\}$, akkor φ pontosan akkor homomorfizmus, ha tetszőleges $a_1, a_2 \in A$-ra

$$(a_1 * a_2)\varphi = (a_1\varphi) \star (a_2\varphi)$$

teljesül.

1. Feladat. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az alábbi $\varphi\colon A \to B$ leképezés az $\mathbf{A}$ algebrából a $\mathbf{B}$ algebrába?

(a) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}; A_n)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; G_n)$ és $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto 3^x$, ahol

$$\begin{aligned} A_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \\ G_n\colon (\mathbb{R}^+)^n \to \mathbb{R}^+,\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}; \end{aligned}$$

(b) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}; \oplus, \odot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$, ahol

$$\begin{aligned} \oplus\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \oplus y = x + y + 1, \\ \odot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \odot y = xy + x + y; \end{aligned}$$

(c) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+; \oplus, \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$, ahol

$$\oplus\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \oplus y = \frac{xy}{x + y};$$

(d) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$;

(e) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; *)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \mapsto \ln x$, ahol

$$*\colon (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \to \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x * y = x^{\ln y};$$

(f) $\mathbf{A} = (\mathbb{C}; +, \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}; +, \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ x + iy \mapsto x$.

*Azaz tetszőleges $f \in F$-re f és $\mathfrak{m}(f)$ aritása megegyezik.

2. Feladat. Legyen n tetszőleges természetes szám. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az $f\colon S_n \to S_n$ leképezés az $\mathbf{A} = (S_n;\ \cdot\ , ^{-1}, \mathrm{id})$ algebrából a $\mathbf{B} = (S_n;\ \cdot\ , ^{-1}, \mathrm{id})$ algebrába?

(a) $f\colon S_n \to S_n,\ \pi \mapsto (1\,2)\pi(1\,2)$;
(b) $f\colon S_n \to S_n,\ \pi \mapsto (1\,2\,3)\pi(1\,2\,3)$;
(c) $f\colon S_n \to S_n,\ \pi \mapsto (1\,2\,3)\pi(1\,3\,2)$.

3. Feladat. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az

$$f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ x \mapsto x^2$$

leképezés az $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_n;\ +\ ,\ \cdot\ )$ algebrából a $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_n;\ +\ ,\ \cdot\ )$ algebrába ($n \in \{2,3,4\}$)?

4. Feladat. Legyen $A \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az $f\colon P(A) \to P(A),\ H \mapsto \overline{H}$ leképezés az $\mathbf{A} = (P(A); F)$ algebrából a $\mathbf{B} = (P(A); F)$ algebrába?

(a) $F = \{\cap, \cup, f\}$;
(b) $F = \{\Delta\}$.

5. Feladat. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az

$$f\colon P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N}),\ H \mapsto H \cup \{1,2,3\}$$

leképezés az $\mathbf{A} = (P(\mathbb{N}); F)$ algebrából a $\mathbf{B} = (P(\mathbb{N}); F)$ algebrába?

(a) $F = \{\cap, \cup\}$;
(b) $F = \{\cap, \cup, \overline{}\}$.

6. Feladat. Adjon meg injektív homomorfizmust a $(\mathbb{Z}_4;\ +\ )$ algebrából az $(S_7;\ \cdot\ )$, $(\mathbb{C};\ \cdot\ )$, $(\mathbb{Z}_{12};\ +\ )$, $(\mathbb{Z}_5;\ \cdot\ )$.

7. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az alábbi T grupoidtulajdonság algebrai tulajdonság, azaz ha T teljesül a $\mathbf{A} = (A;\ *\ )$ grupoidban és $(B;\ \circledast\ ) \cong \mathbf{A}$, akkor T teljesül a $(B;\ \circledast\ )$ grupoidban is. Ennek segítségével mutassa meg, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ algebrák nem izomorfak.

(a) T: az $x * x = a$ egyenlet minden $a \in A$-ra megoldható,
$\mathbf{A} = (\mathbb{Q};\ +\ )$, $\mathbf{B} = (\mathbb{Q}^+;\ \cdot\ )$;
(b) T: az $x * x = a$ egyenlet minden $a \in A$-ra legfeljebb egy megoldása van,
$\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+;\ \cdot\ )$, $\mathbf{B} = (\mathbb{C} \setminus \{0\};\ \cdot\ )$;
(c) T: az $a * a = a$ teljesül minden $a \in A$-ra,
$\mathbf{A} = (P(\mathbb{Z});\ \cup\ )$, $\mathbf{B} = (P(\mathbb{Z}); \Delta)$;
(d) T: $\mathbf{A}$-nak van véges generátorrendszere,
$\mathbf{A} = (\mathbb{Q};\ +\ )$, $\mathbf{B} = (\mathbb{Z};\ +\ )$.

8. Feladat. Mutassa meg, hogy a $\varphi\colon A \to A'$ leképezés homomorfizmus az $\mathbf{A} = (A; F)$ és $\mathbf{A}' = (A'; F')$ algebrák között. Határozza meg a φ homomorfizmus magját és értékkészletét.

(a) $A = A' = P(X)$, $F = F' = \{\cup, \cap\}$ és $\varphi\colon P(X) \to P(X),\ Y \mapsto Y \cap Z$, ahol X tetszőleges nem üres halmaz és $Z \subseteq X$;
(b) $A = \mathbb{C}$, $A' = \mathbb{R}$, $F = F' = \{\cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto |z|$;
(c) $A = S_n$, $A' = \mathbb{R}$, $F = \{\cdot\}$, $F' = \{\cdot\}$ és $\varphi\colon S_n \to \mathbb{R},\ \pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)$, ahol $n \in \mathbb{N}$;
(d) $A = \mathbb{R}[x]$, $A' = \mathbb{R}$, $F = F' = \{+, \cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R},\ p \mapsto p(1)$;
(e) $A = \mathbb{R}[x]$, $A' = \mathbb{R}[x]$, $F = F' = \{+\}$ és $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ p \mapsto p'$;
(f) $A = \mathbb{C}$, $A' = \mathbb{R}$, $F = F' = \{+\}$ és $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ x + iy \mapsto x$;

(g) $A = \mathbb{Z}$, $A' = S_5$, $F = \{+\}$, $F' = \{\cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_5,\ k \mapsto (1\,2\,3\,4\,5)^k$;

(h) $A = \mathbb{Z}$, $A' = \mathbb{C}$, $F = \{+\}$, $F' = \{\cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ k \mapsto \omega^k$, ahol $\omega = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$;

(i) $A = \mathbb{Z}[x]$, $A' = \mathbb{Z}_5[x]$, $F = F' = \{+,\cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_5[x],\ p \mapsto \overline{p}$, ahol $\overline{p} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}x^k$, ha $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

9. Feladat. Döntse el, hogy az $\mathbf{A}$ algebra izomorf-e az $\mathbf{A}'$ algebrával.

(a) $\mathbf{A} = (\mathbb{C};\, +\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{R};\, +\,) \times (\mathbb{R};\, +\,)$;
(b) $\mathbf{A} = (\mathbb{C};\, \cdot\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{R};\, \cdot\,) \times (\mathbb{R};\, \cdot\,)$;
(c) $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_6;\, +\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,) \times (\mathbb{Z}_3;\, +\,)$;
(d) $\mathbf{A} = (S_6;\, +\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,) \times (\mathbb{Z}_3;\, +\,)$;
(e) $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_4;\, +\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,) \times (\mathbb{Z}_2;\, +\,)$;
(f) $\mathbf{A} = (\{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\};\, \cdot\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,) \times (\mathbb{Z}_2;\, +\,)$;
(g) $\mathbf{A} = (P(\{1,2,3\});\, \Delta\,, \cap\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,, \cdot\,) \times (\mathbb{Z}_2;\, +\,, \cdot\,) \times (\mathbb{Z}_2;\, +\,, \cdot\,)$.

Monounér algebrák kongruenciái

Legyen $\mathbf{A} = (A; F)$ tetszőleges algebra. Ekkor a $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ osztályozás **kompatibilis osztályozása** az $\mathbf{A}$ algebrának, ha tetszőleges $f \in F$ művelet (az f művelet mondjuk n-változós, $n \in \mathbb{N}$) esetén, ha $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \varrho(\mathcal{C})$ esetén $(f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \varrho(\mathcal{C})$, ahol $\varrho(\mathcal{C})$ azaz ekvivalenciareláció, amelyhez tartozó osztályozás $\mathcal{C}$.

---

10. Feladat. Legyen $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ és $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az $\mathbf{A} = (A; f)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2,3,4\}, \{5,6\}\}$;
(b) $\mathcal{C} = \{\{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$.

11. Feladat. Mutassa meg, hogy $\alpha \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ és adjon meg izomorfizmust az $\mathbf{A}/\alpha$ és $\mathbf{B}$ algebrák között.

(a) $\mathbf{A} = (\{1,2,3,4\}; f)$, ahol $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $\alpha = \{1,2\}^2 \cup \{3,4\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{a,b\}; \tau)$, ahol $\tau = (a\,b)$;
(b) $\mathbf{A} = (\{1,2,3,4,5,6\}; f)$, ahol f a 10. Feladatban definiált unér művelet, $\alpha = \{1,4\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{5\}^2 \cup \{6\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{1,2,3,4,5\}; \pi)$, ahol $\pi = (1\,2\,3)(4\,5)$.

12. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (A; f)$ algebra kongreunciáit. Rajzoljuk fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ kongruenciahálót.

(a) $A = \{1,2,3,4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \{1,2,3,4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

(c) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

(d) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Grupoidok kongruenciái

13. Feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(P(\mathbb{Z}))$ az $\mathbf{A} = (P(\mathbb{Z}); \cup)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{X \subseteq \mathbb{Z} \mid X \text{ véges}\}, \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid X \text{ végtelen}\}\}$;
(b) $\mathcal{C} = \{\{X \subseteq \mathbb{Z} \mid \mathbb{N} \subseteq X\}, \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid \mathbb{N} \not\subseteq X\}\}$.

14. Feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(\mathbb{Z}_6)$ az $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_6; +)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}, \{\overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}\}$;
(b) $\mathcal{C} = \{\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}\}$.

15. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $m \colon A^3 \to A, m(a, b, c) = \min(\max(a, b), \max(b, c), \max(c, a))$. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az $\mathbf{A} = (A; f)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$;
(b) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$.

16. Feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	c
b	a	b	c	c
c	d	d	b	b
d	c	d	b	a

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az $\mathbf{A} = (A; *)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$;
(b) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$.

17. Feladat. Mutassa meg, hogy $\alpha \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ és adjon meg izomorfizmust az $\mathbf{A}/\alpha$ és $\mathbf{B}$ algebrák között.

(a) $\mathbf{A} = (P(\mathbb{Z}); \cup)$, $\alpha = \{\emptyset\}^2 \cup (P(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\})^2$ és $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_2;\ \cdot\ )$;
(b) $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_6;\ +\ )$, $\alpha = \{\overline{0}, \overline{3}\}^2 \cup \{\overline{1}, \overline{4}\}^2 \cup \{\overline{2}, \overline{5}\}^2$ és $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_3;\ +\ )$;
(c) $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; m)$, ahol m a 2. Feladatban definiált 3-változós művelet, $\alpha = \{1, 2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{4, 5, 6\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{1, 2, 3\}; m|_{\{1,2,3\}})$;
(d) $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d, e\};\ *\ )$, ahol

$*$	a	b	c	d	e
a	a	a	c	d	d
b	b	b	c	e	d
c	c	c	c	e	e
d	d	d	e	e	d
e	d	d	d	d	e

,

$\alpha = \{a, b\}^2 \cup \{c\}^2 \cup \{d, e\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{0, 1, 2\}; \max)$.

18. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoid kongruenciáinak $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	c	d	b
d	d	d	b	c

Rajzolja fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) = (\mathrm{Con}(\mathbf{A}); \wedge, \vee)$ háló Hasse-diagramját. Írja le az $\mathbf{A}/\vartheta$ faktorgrupoidokat tetszőleges $\vartheta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$-ra.

19. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoid kongruenciáinak $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

$*$	a	b	c	d
a	b	b	b	b
b	a	b	b	b
c	a	b	c	d
d	a	b	d	c

Rajzolja fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) = (\mathrm{Con}(\mathbf{A}); \wedge, \vee)$ háló Hasse-diagramját. Írja le az $\mathbf{A}/\vartheta$ faktorgrupoidokat tetszőleges $\vartheta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$-ra.

20. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoid kongruenciáinak $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	d	d
b	b	b	d	d
c	d	d	c	d
d	d	d	d	d

Rajzolja fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) = (\mathrm{Con}(\mathbf{A}); \wedge, \vee)$ háló Hasse-diagramját. Írja le az $\mathbf{A}/\vartheta$ faktorgrupoidokat tetszőleges $\vartheta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$-ra.

21. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi algebrák egyszerűek, azaz csak triviális kongruenciáik vannak.

(a) $(\mathbb{Z}_7; +)$;

(b) $(A; f)$, ahol $A \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és $f\colon A^3 \to A$, $f(a, b, c) = \begin{cases} a, & \text{ha } a = b, \\ c & \text{különben;} \end{cases}$

(c) $(\mathbb{R}; +, \cdot)$;

(d) $(\{a, b, c, d\}; *)$, ahol a $*$ kétváltozós művelet művelettáblázata a következő (a kipontozott helyek tetszőlegesen kitölthetők):

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	a	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
c	b	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

22. Feladat. Legyen $\mathbf{A} = (A; f)$ monounér algebra, valamint legyen B az $\mathbf{A}$ algebra valamely részalgebrájának alaphalmaza. Legyen $\vartheta_B \subseteq A \times A$ az alábbi reláció:

$$\vartheta_B = \{(a, b) \mid a = b \text{ vagy } \{a, b\} \subseteq B\}.$$

Igazolja, hogy ϑ_B kongruenciája $\mathbf{A}$-nak.

23. Feladat. Legyen $\mathbf{S} = (S; \cdot)$ félháló, azaz a $\cdot$ kétváltozós művelet legyen kommutatív, asszociatív és idempotens (azaz tetszőleges $a, b, c \in S$-re $a \cdot b = b \cdot a$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ és $a \cdot a = a$ teljesüljön). Legyen $\leqslant$ az alábbi reláció az S halmazon:

$$a \leqslant b \iff a \cdot b = a \quad (a, b \in S).$$

Mutassa meg, hogy $\leqslant \subseteq S \times S$ részbenrendezés. Adott $a \in S$-re legyen

$$\vartheta_a = \{(b, c) \mid a \leqslant b, c \text{ vagy } a \nleqslant b, c\} \subseteq S \times S.$$

Mutassa meg, hogy ϑ_a az $\mathbf{S}$ algebra kongruenciája.

24. Feladat. Legyen $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ tetszőleges háló, $a, b \in L$. Bizonyítsa be, hogy $\Theta(a, b) = \Theta(a \wedge b, a \vee b)$.

25. Feladat. Legyen $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ disztributív háló, valamint $a, b, c, d \in L$ olyan elemek, hogy $a \leqslant b$. Bizonyítsa be, hogy $(c, d) \in \Theta(a, b)$ pontosan akkor teljesül, ha $a \wedge c = a \wedge d$ és $b \vee c = b \vee d$.