6. Feladatsor

Matematikai Struktúrák (MMN103G)

2009/2010. őszi félév

Homomorfizmusok

Legyenek $\mathbf{A} = (A; F)$ és $\mathbf{B} = (B; G)$ algebrák, $\varphi\colon A \to B$ leképezés. Azt mondjuk, hogy φ homomorfizmus az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ algebrák között, ha van olyan $\mathfrak{m}\colon F \to G$ aritásőrző* bijekció, hogy tetszőleges $f \in F$-re (az f művelet legyen n-változós) és tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in A$-ra

$$(f(a_1, \ldots, a_n))\varphi = (\mathfrak{m}(f))(a_1\varphi, \ldots, a_n\varphi)$$

teljesül. A következő elnevezések használatosak:

$$\begin{aligned} \textbf{beágyazás}: &\ \text{injektív homomorfizmus},\\ \textbf{izomorfizmus}: &\ \text{bijektív homomorfizmus},\\ \textbf{endomorfizmus}: &\ \varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A} \text{ homomorfizmus},\\ \textbf{automorfizmus}: &\ \varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A} \text{ izomorfizmus}. \end{aligned}$$

Ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ algebrák grupoidok, pl. $F = \{*\}$ és $G = \{\star\}$, akkor φ pontosan akkor homomorfizmus, ha tetszőleges $a_1, a_2 \in A$-ra

$$(a_1 * a_2)\varphi = (a_1\varphi) \star (a_2\varphi)$$

teljesül.

1. Feladat. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az alábbi $\varphi\colon A \to B$ leképezés az $\mathbf{A}$ algebrából a $\mathbf{B}$ algebrába?

(a) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}; A_n)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; G_n)$ és $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto 3^x$, ahol

$$A_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$
$$G_n\colon (\mathbb{R}^+)^n \to \mathbb{R}^+,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n};$$

(b) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}; \oplus, \odot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$, ahol

$$\oplus\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \oplus y = x + y + 1,$$
$$\odot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \odot y = xy + x + y;$$

(c) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+; \oplus, \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$, ahol

$$\oplus\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \oplus y = \frac{xy}{x + y};$$

(d) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}^+; +, \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$;

(e) $\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; *)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \mapsto \ln x$, ahol

$$*\colon (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \to \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x * y = x^{\ln y};$$

(f) $\mathbf{A} = (\mathbb{C}; +, \cdot)$, $\mathbf{B} = (\mathbb{R}; +, \cdot)$ és $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ x + iy \mapsto x$.

*Azaz tetszőleges $f \in F$-re f és $\mathfrak{m}(f)$ aritása megegyezik.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) A φ leképezés izomorfizmus: φ bijektív és tetszőleges $r_1, \ldots, r_n$ valós számokra

$$A_n(r_1, \ldots, r_n)\varphi = 3^{(r_1+\cdots+r_n)/n} = \sqrt[n]{3^{r_1} \cdots 3^{r_n}} = G_n(r_1\varphi, \ldots, r_n\varphi),$$

teljesül, azaz φ homomorfizmus is.

(b) A φ leképezés izomorfizmus: φ bijektív és tetszőleges r_1, r_2 valós számokra

$$(r_1 \oplus r_2)\varphi = (r_1 + r_2 + 1)\varphi = r_1 + r_2 + 2 = (r_1 + 1) + (r_2 + 1) = r_1\varphi + r_2\varphi,$$
$$(r_1 \odot r_2)\varphi = (r_1r_2 + r_1 + r_2)\varphi = r_1r_2 + r_1 + r_2 + 1 = (r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) = (r_1\varphi) \cdot (r_2\varphi)$$

teljesül, azaz φ homomorfizmus is.

(c) A φ leképezés izomorfizmus: φ bijektív és tetszőleges r_1, r_2 valós számokra

$$(r_1 \oplus r_2)\varphi = \left(\frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}\right)\varphi = \frac{r_1 + r_2}{r_1r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = r_1\varphi + r_2\varphi,$$
$$(r_1 \cdot r_2)\varphi = \frac{1}{r_1 \cdot r_2} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = (r_1\varphi) \cdot (r_2\varphi)$$

teljesül, azaz φ homomorfizmus is.

(d) A φ leképezés nem homomorfizmus: $(2+3)\varphi \neq 2\varphi + 3\varphi$ és $(2+3)\varphi \neq 2\varphi \cdot 3\varphi$.

(e) A φ leképezés izomorfizmus: φ bijektív és tetszőleges r_1, r_2 valós számokra

$$(r_1 * r_2)\varphi = \left(r_1^{\ln r_2}\right)\varphi = \ln\left(r_1^{\ln r_2}\right) = \ln r_1 \cdot \ln r_2 = (r_1\varphi) \cdot (r_2\varphi)$$

teljesül, azaz φ homomorfizmus is.

(f) A φ leképezés nem homomorfizmus: $(i \cdot i)\varphi \neq i\varphi \cdot i\varphi$, $(i \cdot i)\varphi \neq i\varphi + i\varphi$.

2. Feladat. Legyen n tetszőleges természetes szám. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az $f\colon S_n \to S_n$ leképezés az $\mathbf{A} = (S_n;\ \cdot\ , ^{-1}, \mathrm{id})$ algebrából a $\mathbf{B} = (S_n;\ \cdot\ , ^{-1}, \mathrm{id})$ algebrába?

(a) $f\colon S_n \to S_n,\ \pi \mapsto (1\,2)\pi(1\,2)$;
(b) $f\colon S_n \to S_n,\ \pi \mapsto (1\,2\,3)\pi(1\,2\,3)$;
(c) $f\colon S_n \to S_n,\ \pi \mapsto (1\,2\,3)\pi(1\,3\,2)$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) és (c) automorfizmus; (b) nem homomorfizmus.

3. Feladat. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az

$$f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ x \mapsto x^2$$

leképezés az $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_n;\ +\ ,\ \cdot\ )$ algebrából a $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_n;\ +\ ,\ \cdot\ )$ algebrába ($n \in \{2, 3, 4)$)?

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Ha $n = 2$, akkor $f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$ automorfizmus.
Ha $n = 3$, akkor f nem homomorfizmus: $(\overline{1} + \overline{2})^2 = \overline{0} \neq \overline{2} = \overline{1}^2 + \overline{2}^2$ és $(\overline{1} + \overline{2})^2 = \overline{0} \neq \overline{1} = \overline{1}^2 \cdot \overline{2}^2$.
Ha $n = 4$, akkor f nem homomorfizmus: $(\overline{1} + \overline{3})^2 = \overline{0} \neq \overline{2} = \overline{1}^2 + \overline{3}^2$ és $(\overline{1} + \overline{2})^2 = \overline{0} \neq \overline{1} = \overline{1}^2 \cdot \overline{3}^2$.

4. Feladat. Legyen $A \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az $f\colon P(A) \to P(A),\ H \mapsto \overline{H}$ leképezés az $\mathbf{A} = (P(A); F)$ algebrából a $\mathbf{B} = (P(A); F)$ algebrába?

(a) $F = \{\cap, \cup, f\}$;
(b) $F = \{\Delta\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Legyenek H és K tetszőleges részhalmazai A-nak.

(a) Ekkor teljesülnek a $(H \cap K)f = \overline{H \cap K} = \overline{H} \cup \overline{K}$ és $(H \cup K)f = \overline{H \cup K} = \overline{H} \cap \overline{K}$ egyenlőségek a de Morgan-azonosságok következtében, valamint $(f(H))f = \overline{H}f = \overline{\overline{H}} = H = f(Hf)$ is teljesül, így f homomorfizmus.

(b) Ekkor $(H \mathbin{\Delta} K)f = \overline{H \mathbin{\Delta} K}$ és $Hf \mathbin{\Delta} Kf = \overline{H} \mathbin{\Delta} \overline{K} = H \mathbin{\Delta} K$. Így

$$(\emptyset \mathbin{\Delta} A)f = \overline{A} = \emptyset \neq A = \emptyset \mathbin{\Delta} A = \overline{\emptyset} \mathbin{\Delta} \overline{A},$$

azaz f nem homomorfizmus.

5. Feladat. Homomorfizmus, beágyazás, izomorfizmus, endomorfizmus, illetve automorfizmus-e az

$$f\colon P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N}),\ H \mapsto H \cup \{1,2,3\}$$

leképezés az $\mathbf{A} = (P(\mathbb{N}); F)$ algebrából a $\mathbf{B} = (P(\mathbb{N}); F)$ algebrába?

(a) $F = \{\cap, \cup\}$;
(b) $F = \{\cap, \cup, \overline{}\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) homomorfizmus; (b) nem homomorfizmus.

6. Feladat. Adjon meg injektív homomorfizmust a $(\mathbb{Z}_4;\ +\ )$ algebrából az $(S_7;\ \cdot\ )$, $(\mathbb{C};\ \cdot\ )$, $(\mathbb{Z}_{12};\ +\ )$, $(\mathbb{Z}_5;\ \cdot\ )$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ A $\mathbb{Z}_4 \to S_7,\ \overline{1} \mapsto (1\,2\,3\,4)$, $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{C},\ \overline{1} \mapsto i$ és $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{12},\ \overline{1} \mapsto \overline{3}$ leképezések injektív homomorfizmusok, $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_5$ homomorfizmus nincs.

7. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az alábbi T grupoidtulajdonság algebrai tulajdonság, azaz ha T teljesül a $\mathbf{A} = (A;\ *\ )$ grupoidban és $(B;\ \circledast\ ) \cong \mathbf{A}$, akkor T teljesül a $(B;\ \circledast\ )$ grupoidban is. Ennek segítségével mutassa meg, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ algebrák nem izomorfak.

(a) T: az $x * x = a$ egyenlet minden $a \in A$-ra megoldható,
$\mathbf{A} = (\mathbb{Q};\ +\ )$, $\mathbf{B} = (\mathbb{Q}^+;\ \cdot\ )$;
(b) T: az $x * x = a$ egyenlet minden $a \in A$-ra legfeljebb egy megoldása van,
$\mathbf{A} = (\mathbb{R}^+;\ \cdot\ )$, $\mathbf{B} = (\mathbb{C} \setminus \{0\};\ \cdot\ )$;
(c) T: az $a * a = a$ teljesül minden $a \in A$-ra,
$\mathbf{A} = (P(\mathbb{Z});\ \cup\ )$, $\mathbf{B} = (P(\mathbb{Z}); \Delta)$;
(d) T: $\mathbf{A}$-nak van véges generátorrendszere,
$\mathbf{A} = (\mathbb{Q};\ +\ )$, $\mathbf{B} = (\mathbb{Z};\ +\ )$.

8. Feladat. Mutassa meg, hogy a $\varphi\colon A \to A'$ leképezés homomorfizmus az $\mathbf{A} = (A; F)$ és $\mathbf{A}' = (A'; F')$ algebrák között. Határozza meg a φ homomorfizmus magját és értékkészletét.

(a) $A = A' = P(X)$, $F = F' = \{\cup, \cap\}$ és $\varphi\colon P(X) \to P(X),\ Y \mapsto Y \cap Z$, ahol X tetszőleges nem üres halmaz és $Z \subseteq X$;
(b) $A = \mathbb{C}$, $A' = \mathbb{R}$, $F = F' = \{\cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto |z|$;
(c) $A = S_n$, $A' = \mathbb{R}$, $F = \{\cdot\}$, $F' = \{\cdot\}$ és $\varphi\colon S_n \to \mathbb{R},\ \pi \mapsto \operatorname{sgn}(\pi)$, ahol $n \in \mathbb{N}$;
(d) $A = \mathbb{R}[x]$, $A' = \mathbb{R}$, $F = F' = \{+, \cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R},\ p \mapsto p(1)$;
(e) $A = \mathbb{R}[x]$, $A' = \mathbb{R}[x]$, $F = F' = \{+\}$ és $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ p \mapsto p'$;
(f) $A = \mathbb{C}$, $A' = \mathbb{R}$, $F = F' = \{+\}$ és $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ x + iy \mapsto x$;
(g) $A = \mathbb{Z}$, $A' = S_5$, $F = \{+\}$, $F' = \{\cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_5,\ k \mapsto (1\,2\,3\,4\,5)^k$;
(h) $A = \mathbb{Z}$, $A' = \mathbb{C}$, $F = \{+\}$, $F' = \{\cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ k \mapsto \omega^k$, ahol $\omega = \cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}$;
(i) $A = \mathbb{Z}[x]$, $A' = \mathbb{Z}_5[x]$, $F = F' = \{+, \cdot\}$ és $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_5[x],\ p \mapsto \overline{p}$, ahol $\overline{p} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} x^k$, ha $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$

(a) $\ker(\varphi) = \big\{(H \cup Z', K \cup Z') \mid Z' \subseteq Z \text{ és } H, K \subseteq \overline{Z}\big\}$,
φ képtere: $P(Z)$.

(b) $\ker(\varphi) = \{(0,0)\} \cup \{(r\varepsilon, r\varepsilon') \mid \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{C}$ és $|\varepsilon|, |\varepsilon'| = 1\}$,
φ képtere: $\mathbb{R}_0^+$.
(c) $\ker(\varphi) = \big\{(\sigma, \sigma') \mid \sigma'\sigma^{-1}$ páros$\big\}$,
φ képtere: $\{-1, +1\}$.
(d) $\ker(\varphi) = \{(p,q) \mid p-q$ osztható $x-1$-gyel$\}$,
φ képtere: $\mathbb{R}$.
(e) $\ker(\varphi) = \{(p,q) \mid p-q$ konstans$\}$,
φ képtere: $\mathbb{R}[x]$.
(f) $\ker(\varphi) = \{(v,w) \mid v-w$ tisztán képzetes$\}$,
φ képtere: $\mathbb{R}$.
(g) $\ker(\varphi) = \{(m,n) \mid m-n$ osztható 5-tel$\}$,
φ képtere: $\langle(1\,2\,3\,4\,5)\rangle$.
(h) $\ker(\varphi) = \{(m,n) \mid m-n$ osztható 6-tal$\}$,
φ képtere: $\langle\omega\rangle$.
(i) $\ker(\varphi) = \{(p,q) \mid p-q$ minden együtthatója osztható 5-tel$\}$,
φ képtere: $\mathbb{Z}_5[x]$.

9. Feladat. Döntse el, hogy az $\mathbf{A}$ algebra izomorf-e az $\mathbf{A}'$ algebrával.

(a) $\mathbf{A} = (\mathbb{C};\, +\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{R};\, +\,) \times (\mathbb{R};\, +\,)$;
(b) $\mathbf{A} = (\mathbb{C};\, \cdot\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{R};\, \cdot\,) \times (\mathbb{R};\, \cdot\,)$;
(c) $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_6;\, +\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,) \times (\mathbb{Z}_3;\, +\,)$;
(d) $\mathbf{A} = (S_6;\, +\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,) \times (\mathbb{Z}_3;\, +\,)$;
(e) $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_4;\, +\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,) \times (\mathbb{Z}_2;\, +\,)$;
(f) $\mathbf{A} = (\{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\};\, \cdot\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,) \times (\mathbb{Z}_2;\, +\,)$;
(g) $\mathbf{A} = (P(\{1,2,3\});\, \Delta\,, \cap\,)$, $\mathbf{A}' = (\mathbb{Z}_2;\, +\,, \cdot\,) \times (\mathbb{Z}_2;\, +\,, \cdot\,) \times (\mathbb{Z}_2;\, +\,, \cdot\,)$.

MEGOLDÁS.

(a) Az $\mathbf{A} \to \mathbf{A}',\ x+iy \mapsto (x,y)$ leképezés izomorfizmus.
(b) Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ algebrák nem izomorfak (az $\mathbf{A}$ algebrában van harmadrendű elem).
(c) Az $\mathbf{A} \to \mathbf{A}',\ \overline{a}^{(6)} \mapsto (\overline{a}^{(2)}, \overline{a}^{(3)})$ leképezés izomorfizmus.
(d) Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ algebrák nem izomorfak (az $\mathbf{A}$ algebra nem kommutatív).
(e) Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ algebrák nem izomorfak (az $\mathbf{A}'$ algebrában van egyelemű generátorrendszer).
(f) Az $\mathbf{A} \to \mathbf{A}',\ \mathrm{id} \mapsto (\overline{0}, \overline{0}),\ (1\,2)(3\,4) \mapsto (\overline{0}, \overline{1}),\ (1\,3)(2\,4) \mapsto (\overline{1}, \overline{0}),\ (1\,4)(2\,3) \mapsto (\overline{1}, \overline{1})$ leképezés izomorfizmus.
(g) Az $\mathbf{A} \to \mathbf{A}',\ H \mapsto (1_H, 2_H, 3_H)$ leképezés izomorfizmus, ahol tetszőleges $k \in \{1,2,3\}$-ra

$$k_H = \begin{cases} \overline{0}, & \text{ha } k \notin H, \\ \overline{1}, & \text{ha } k \in H. \end{cases}$$

Monounér algebrák kongruenciái

Legyen $\mathbf{A} = (A; F)$ tetszőleges algebra. Ekkor a $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ osztályozás **kompatibilis osztályozása** az $\mathbf{A}$ algebrának, ha tetszőleges $f \in F$ művelet (az f művelet mondjuk n-változós, $n \in \mathbb{N}$) esetén, ha $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \varrho(\mathcal{C})$ esetén $(f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \varrho(\mathcal{C})$, ahol $\varrho(\mathcal{C})$ azaz ekvivalenciareláció, amelyhez tartozó osztályozás $\mathcal{C}$.

---

10. Feladat. Legyen $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ és $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az $\mathbf{A} = (A; f)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$;

(b) $\mathcal{C} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) A $\mathcal{C}$ osztályozás kompatibilis;
(b) a $\mathcal{C}$ osztályozás nem kompatibilis: $(2, 4) \in \varrho(\mathcal{C})$, de $(2f, 4f) = (3, 4) \notin \varrho(\mathcal{C})$.

11. Feladat. Mutassa meg, hogy $\alpha \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ és adjon meg izomorfizmust az $\mathbf{A}/\alpha$ és $\mathbf{B}$ algebrák között.

(a) $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3, 4\}; f)$, ahol $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $\alpha = \{1, 2\}^2 \cup \{3, 4\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{a, b\}; \tau)$, ahol $\tau = (a\,b)$;

(b) $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; f)$, ahol f a 10. Feladatban definiált unér művelet, $\alpha = \{1, 4\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{5\}^2 \cup \{6\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{1, 2, 3, 4, 5\}; \pi)$, ahol $\pi = (1\,2\,3)(4\,5)$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) Az nyilvánvaló, hogy az α reláció ekvivalenciareláció. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \alpha$, ahol $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ és $a \neq b$. Ekkor

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \{1, 2\}, \text{ és így } (af, bf) = \{3, 4\} \text{ miatt } (af, bf) \in \alpha \text{ vagy}, \\ \{a, b\} &= \{3, 4\}, \text{ és így } (af, bf) = \{1, 2\} \text{ miatt } (af, bf) \in \alpha, \end{aligned}$$

azaz α valóban kongruenciája $\mathbf{A}$-nak. Valamint

$$\mathbf{A}/\alpha = (A/\alpha; f),$$

ahol $A/\alpha = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ és f az alábbi művelet az A/α halmazon:

x	xf
$\{1, 2\}$	$\{3, 4\}$
$\{3, 4\}$	$\{1, 2\}$

Így a $\varphi\colon A/\alpha \to \{a, b\}$, $\{1, 2\} \mapsto a$, $\{3, 4\} \mapsto b$ leképezés izomorfizmus az $\mathbf{A}/\alpha$ és $\mathbf{B}$ algebrák között.

(b) Az nyilvánvaló, hogy az α reláció ekvivalenciareláció. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \alpha$, ahol $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $a \neq b$. Ekkor $\{a, b\} = \{1, 4\}$, és így $(af, bf) = \{2\}$ miatt $(af, bf) = (2, 2,) \in \alpha$, azaz α valóban kongruenciája $\mathbf{A}$-nak. Valamint

$$\mathbf{A}/\alpha = (A/\alpha; f),$$

ahol $A/\alpha = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}\}$ és f az alábbi művelet az A/α halmazon:

x	xf
$\{1, 4\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{3\}$
$\{3\}$	$\{1, 4\}$
$\{5\}$	$\{6\}$
$\{6\}$	$\{5\}$

Így a $\varphi\colon A/\alpha \to \{a, b\}$, $\{1, 4\} \mapsto 1$, $\{2\} \mapsto 2$, $\{3\} \mapsto 3$, $\{5\} \mapsto 5$, $\{6\} \mapsto 4$ leképezés izomorfizmus az $\mathbf{A}/\alpha$ és $\mathbf{B}$ algebrák között.

12. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (A; f)$ algebra kongreunciáit. Rajzoljuk fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ kongruenciahálót.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

(c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

(d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Valamennyi esetben először a főkongruenciákat, azaz a $\Theta(a,b)$ alakú kongruenciákat határozzuk meg, ahol $a, b \in A$ és $a \neq b$.

1. Állítás. Legyen $a, b \in A$ és $a \neq b$. Ekkor $\Theta(a,b)$ a

$$0_A \cup \left\{(af^k, bf^k) \mid k \in \mathbb{N}_0\right\} \cup \left\{(bf^k, af^k) \mid k \in \mathbb{N}_0\right\} \subseteq A \times A$$

reláció tranzitív lezártja, ahol $f^0 = \mathrm{id}_A$ és $f^k = f^{k-1} \circ f$ $(k \in \mathbb{N})$.

2. Állítás. Ha $\alpha \in \mathrm{Con}(A)$, akkor

$$\alpha = \bigvee_{(a.b)\in\alpha} \Theta(a,b).$$

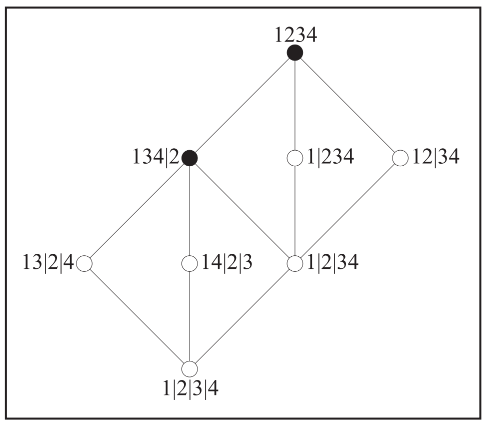
(a) A főkongruenciák a következők:

$\Theta(1,2) = \{1,2\}^2 \cup \{3,4\}^2$, $\Theta(1,3) = \{1,3\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{4\}^2$, $\Theta(1,4) = \{1,4\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{3\}^2$,
$\Theta(2,3) = \{1\}^2 \cup \{2,3,4\}^2$, $\Theta(2,4) = \{1\}^2 \cup \{2,3,4\}^2$,
$\Theta(3,4) = \{1\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{3,4\}^2$.

Főkongruenciák egyesítéseként még két további kongruenciát kapunk:

$$\Theta(1,3) \vee \Theta(1,4) = \{1,3,4\}^2 \cup \{2\}^2 \quad \text{és} \quad \Theta(1,2) \vee \Theta(2,3) = 1_A.$$

Az **A** algebra kongruenciahálója a következő:



1. ábra.

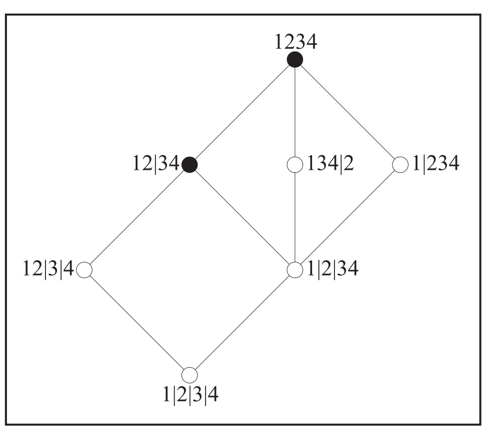
(b) A főkongruenciák a következők:

$\Theta(1,2) = \{1,2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{4\}^2$, $\Theta(1,3) = \{1,3,4\}^2 \cup \{2\}^2$, $\Theta(1,4) = \{1,3,4\}^2 \cup \{2\}^2$,
$\Theta(2,3) = \{1\}^2 \cup \{2,3,4\}^2$, $\Theta(2,4) = \{1\}^2 \cup \{2,3,4\}^2$,
$\Theta(3,4) = \{1\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{3,4\}^2$.

Főkongruenciák egyesítéseként még két további kongruenciát kapunk:

$$\Theta(1,2) \vee \Theta(3,4) = \{1,2\}^2 \cup \{3,4\}^2 \quad \text{és} \quad \Theta(1,3) \vee \Theta(2,3) = 1_A.$$

Az **A** algebra kongruenciahálója a következő:



2. ábra.

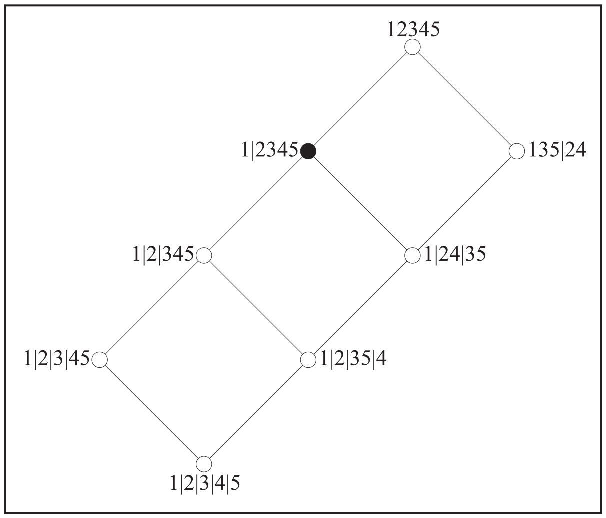
(c) A főkongruenciák a következők:

$$\begin{array}{ll}
\Theta(1,2) = 1_A, & \Theta(1,3) = \{1,3,5\}^2 \cup \{2,4\}^2, \\
\Theta(1,4) = 1_A, & \Theta(1,5) = \{1,3,5\}^2 \cup \{2,4\}^2, \\
\Theta(2,3) = \{1\}^2 \cup \{2,3,4,5\}^2, & \Theta(2,4) = \{1\}^2 \cup \{2,4\}^2 \cup \{3,5\}^2, \\
\Theta(2,5) = \{1\}^2 \cup \{2,3,4,5\}^2, & \Theta(3,4) = \{1\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{3,4,5\}^2, \\
\Theta(3,5) = \{1\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{3,5\}^2 \cup \{4\}^2, & \Theta(4,5) = \{1\}^2 \cup \{2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{4,5\}^2.
\end{array}$$

Főkongruenciák egyesítéseként még egy további kongruenciát kapunk:

$$\Theta(2,4) \vee \Theta(3,4) = \{1\}^2 \cup \{2,3,4,5\}^2.$$

Az **A** algebra kongruenciahálója a következő:



3. ábra.

(d) Az **A** algebra kongruenciái $\alpha \cup \{4\}^2$, illetve $(\beta \cup \{4,5\}^2)^*$ alakúk, ahol $\alpha \in \mathrm{Eq}(\{1,2,3,5\})$, illetve $\beta \in \mathrm{Eq}(\{1,2,3,4\})$.

Ha ϱ az **A** algebra kongruenciája, akkor egyszerűen látható, hogy a $\varrho \cap \{1,2,3,5\}^2$, illetve $\varrho \cap \{1,2,3,4\}^2$ reláció ekvivalenciareláció az $\{1,2,3,5\}$, illetve $\{1,2,3,4\}$ halmazon.

Tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathrm{Eq}(\{1,2,3,5\})$, és legyen $\varrho = \alpha \cup \{4\}^2$. Ha $(a,b) \in \varrho \backslash 0_A$, akkor $(a,b) \in \{1,2,3,5\}$ miatt $(af, bf) = (4,4) \in \varrho$, azaz $\varrho \in \mathrm{Con}(A)$.

Tegyük fel, hogy $\beta \in \mathrm{Eq}(\{1,2,3,4\})$, és legyen $\varrho = (\beta \cup \{4,5\}^2)^*$. Ekkor $4\varrho^\bullet = 4\beta^\bullet \cup \{5\}$ és tetszőleges $c \in A \setminus 4\varrho^\bullet$-re $c\varrho^\bullet = c\beta^\bullet$. Tegyük fel, hogy $(a,b) \in \varrho$ és $a < b$. Ha $b \leqslant 4$, akkor $(a,b) \in \beta$ miatt $(af, bf) = (4, bf) \in \{(4,4),(4,5)\} \subseteq \varrho$. Ha $b = 5$, akkor $(af, bf) = (af, 4) \in \{(5,4),(4,4)\} \subseteq \varrho$. Azaz ϱ ekkor is kongruenciája **A**-nak.

Grupoidok kongruenciái

13. Feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(P(\mathbb{Z}))$ az $\mathbf{A} = (P(\mathbb{Z}); \cup)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{X \subseteq \mathbb{Z} \mid X \text{ véges}\}, \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid X \text{ végtelen}\}\}$;
(b) $\mathcal{C} = \{\{X \subseteq \mathbb{Z} \mid \mathbb{N} \subseteq X\}, \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid \mathbb{N} \not\subseteq X\}\}$.

MEGOLDÁS. (a) A $\mathcal{C}$ osztályozás kompatibilis. (b) A $\mathcal{C}$ osztályozás nem kompatibilis.

14. Feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(\mathbb{Z}_6)$ az $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_6; +)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}, \{\overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}\}$;
(b) $\mathcal{C} = \{\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) A $\mathcal{C}$ osztályozás nem kompatibilis. (b) A $\mathcal{C}$ osztályozás kompatibilis.

15. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $m\colon A^3 \to A$, $m(a, b, c) = \min(\max(a, b), \max(b, c), \max(c, a))$. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az $\mathbf{A} = (A; f)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$;
(b) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) A $\mathcal{C}$ osztályozás kompatibilis. (b) A $\mathcal{C}$ osztályozás nem kompatibilis.

16. Feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	c
b	a	b	c	c
c	d	d	b	b
d	c	d	b	a

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az $\mathbf{A} = (A; *)$ algebrának?

(a) $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$;
(b) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) A $\mathcal{C}$ osztályozás kompatibilis. (b) A $\mathcal{C}$ osztályozás nem kompatibilis.

17. Feladat. Mutassa meg, hogy $\alpha \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ és adjon meg izomorfizmust az $\mathbf{A}/\alpha$ és $\mathbf{B}$ algebrák között.

(a) $\mathbf{A} = (P(\mathbb{Z}); \cup)$, $\alpha = \{\emptyset\}^2 \cup (P(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\})^2$ és $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_2; \cdot\,)$;
(b) $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}_6; +)$, $\alpha = \{\overline{0}, \overline{3}\}^2 \cup \{\overline{1}, \overline{4}\}^2 \cup \{\overline{2}, \overline{5}\}^2$ és $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_3; +)$;
(c) $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; m)$, ahol m a 2. Feladatban definiált 3-változós művelet, $\alpha = \{1, 2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{4, 5, 6\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{1, 2, 3\}; m|_{\{1,2,3\}})$;
(d) $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d, e\}; *)$, ahol

$*$	a	b	c	d	e
a	a	a	c	d	d
b	b	b	c	e	d
c	c	c	c	e	e
d	d	d	e	e	d
e	d	d	d	d	e

,

$\alpha = \{a, b\}^2 \cup \{c\}^2 \cup \{d, e\}^2$ és $\mathbf{B} = (\{0, 1, 2\}; \max)$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) Tegyük fel, hogy $(X, Y), (X', Y') \in \alpha$. Ha $X = Y$ vagy $X' = Y'$, akkor $X \cup X' = Y \cup Y'$ miatt $(X \cup X', Y \cup Y') \in 0_{P(\mathbb{Z})} \subseteq \alpha$. Ellenkező esetben $X \neq Y$ és $X' \neq Y'$ teljesül, így $X, X', Y, Y' \neq \emptyset$. Ezért $X \cup X', Y \cup Y' \neq \emptyset$ miatt $(X \cup X', Y \cup Y') \in \alpha$. Azaz α kongruencia. Az $\mathbf{A}/\alpha$ faktoralgebra és a $\mathbf{B}$ algebra műveletének táblázatai a következők:

$\cup$	$\{\emptyset\}$	$P(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\}$
$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$P(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\}$
$P(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\}$	$P(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\}$	$P(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\}$

,

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

.

Így a $\varphi\colon A/\alpha \to \mathbb{Z}_2$, $\{\emptyset\} \mapsto \overline{1}$, $P(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\} \mapsto \overline{0}$ leképezés izomorfizmus.

(b) Tegyük fel, hogy $(x, y), (x', y') \in \alpha$. Felhasználva, hogy $(u, v) \in \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha $u - v \in \{\overline{0}, \overline{3}\}$ azt kapjuk, hogy $(x + x') - (x + y') = (x - x') + (y - y') \in \{\overline{0}, \overline{3}\}$, azaz $(x + x', y + y') \in \alpha$. Így α kongriencia. Az $\mathbf{A}/\alpha$ faktoralgebra és a $\mathbf{B}$ algebra műveletének táblázatai a következők:

$+$	$\{\overline{0}, \overline{3}\}$	$\{\overline{1}, \overline{4}\}$	$\{\overline{2}, \overline{5}\}$
$\{\overline{0}, \overline{3}\}$	$\{\overline{0}, \overline{3}\}$	$\{\overline{1}, \overline{4}\}$	$\{\overline{2}, \overline{5}\}$
$\{\overline{1}, \overline{4}\}$	$\{\overline{1}, \overline{4}\}$	$\{\overline{2}, \overline{5}\}$	$\{\overline{0}, \overline{3}\}$
$\{\overline{2}, \overline{5}\}$	$\{\overline{2}, \overline{5}\}$	$\{\overline{0}, \overline{3}\}$	$\{\overline{1}, \overline{4}\}$

,

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

.

Így a $\varphi\colon A/\alpha \to \mathbb{Z}_3$, $\{\overline{0}, \overline{3}\} \mapsto \overline{0}$, $\{\overline{1}, \overline{4}\} \mapsto \overline{1}$, $\{\overline{2}, \overline{5}\} \mapsto \overline{2}$ leképezés izomorfizmus.

(c) Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mindenek előtt jegyezzük meg, hogy az m műveletre teljesülnek a következők:

- tetszőleges $a_1, a_2, a_3 \in A$-ra és tetszőleges $\pi \in S_3$ permutációra teljesül, hogy
$$m(a_1, a_2, a_3) = m(a_{1\pi}, a_{2\pi}, a_{3\pi});$$
- ha az $a, b, c \in A$ elemekre $a \leqslant b \leqslant c$ teljesük, akkor $m(a, b, c) = b$.

Az α kongreunciára pedig teljesül, hogy tetszőleges $a, b \in A$-ra,

$$\text{ha } a\alpha^\bullet \neq b\alpha^\bullet,\ a < b \text{ és } (a, a'), (b, b') \in \alpha, \text{ akkor } a' < b'. \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy $(a_i, b_i) \in \alpha$ $(i = 1, 2, 3)$. Az előbb említettek szerint az is feltehető, hogy $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$. Ekkor $m(a_1, a_2, a_3) = a_2$.
1. eset: $a_1\alpha^\bullet = a_2\alpha^\bullet = a_3\alpha^\bullet$.
2. eset: $a_1\alpha^\bullet = a_2\alpha^\bullet \neq a_3\alpha^\bullet$. Ekkor (1) szerint $b_1, b_2 < b_3$, így $m(b_1, b_2, b_3) \in \{b_1, b_2\}$, és ennek következtében
$$(m(a_1, a_2, a_3), m(b_1, b_2, b_3)) = (a_2, m(b_1, b_2, b_3)) \in \alpha.$$
3. eset: az $a_1\alpha^\bullet$, $a_2\alpha^\bullet$ és $a_3\alpha^\bullet$ osztályok páronként különbözőek. Ekkor (1) szerint $b_1 < b_2 < b_3$, így $m(b_1, b_2, b_3) = b_2$, és ennek következtében

$$(m(a_1, a_2, a_3), m(b_1, b_2, b_3)) = (a_2, b_2) \in \alpha.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\alpha \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Egyszerűen látható, hogy az $A/\alpha \to \{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\} \mapsto 1$, $\{3\} \mapsto 2$, $\{4, 5, 6\} \mapsto 3$ leképezés izomorfizmus.

(d) Legyen $A = \{a, b, c, d, e\}$. A művelettáblázatból egyszerűen látható, hogy tetszőleges $x, x', y, y' \in A$ elemekre teljesül, hogy ha

$$(y, y') \in \alpha \Longrightarrow (x * y, x * y') \in \alpha,$$
$$(x, x') \in \alpha \Longrightarrow (x * y, x' * y) \in \alpha.$$

Tegyük fel, hogy $x, x', y, y' \in A$ és $(x, x'), (y, y') \in \alpha \setminus 0_A$. Az alábbi eseteket megvizsgálva egyszerűen látható, hogy α az $\mathbf{A}$ algebra kongruenciája.
1. eset: $\{x, x'\}, \{y, y'\} = \{a, b\}$;
2. eset: $\{x, x'\} = \{a, b\}$, $\{y, y'\} = \{d, e\}$;
3. eset: $\{x, x'\} = \{d, e\}$, $\{y, y'\} = \{a, b\}$;
4. eset: $\{x, x'\}, \{y, y'\} = \{d, e\}$.
Az $A/\alpha \to \{1, 2, 3\}$, $\{a, b\} \mapsto 0$, $\{c\} \mapsto 1$, $\{d, e\} \mapsto 2$ leképezés izomorfizmus.

18. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoid kongruenciáinak $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	c	d	b
d	d	d	b	c

Rajzolja fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) = (\mathrm{Con}(\mathbf{A}); \wedge, \vee)$ háló Hasse-diagramját. Írja le az $\mathbf{A}/\vartheta$ faktorgrupoidokat tetszőleges $\vartheta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$-ra.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az $\mathbf{A}$ algebra főkongruenciái a következők: $\Theta(a, b) = \{a, b\}^2 \cup \{c\}^2 \cup \{d\}^2$, $\Theta(a, c) = \Theta(a, d) = 1_A$ és $\Theta(b, c) = \Theta(b, d) = \Theta(c, d) = \{a\}^2 \cup \{b, c, d\}^2$. Így

$$\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \{0_A, 1_A, \{a, b\}^2 \cup \{c\}^2 \cup \{d\}^2, \{a\}^2 \cup \{b, c, d\}^2\}.$$

A (nem triviális) faktoralgebrák a következők:

- $\mathbf{A}/\Theta(a, b) \cong_\varphi (\mathbb{Z}_3;\, +)$, $\varphi\colon A/\Theta(a, b) \to \mathbb{Z}_3$, $\{a, b\} \mapsto \overline{0}$, $\{c\} \mapsto \overline{1}$, $\{d\} \mapsto \overline{2}$;

- $\mathbf{A}/\Theta(b,c) \cong_\varphi (\{0,1\};\, \vee\,)$, $\varphi\colon A/\Theta(b,c) \to \{0,1\}$, $\{a\} \mapsto 0$, $\{b,c,d\} \mapsto 1$.

19. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (\{a,b,c,d\};*)$ grupoid kongruenciáinak $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

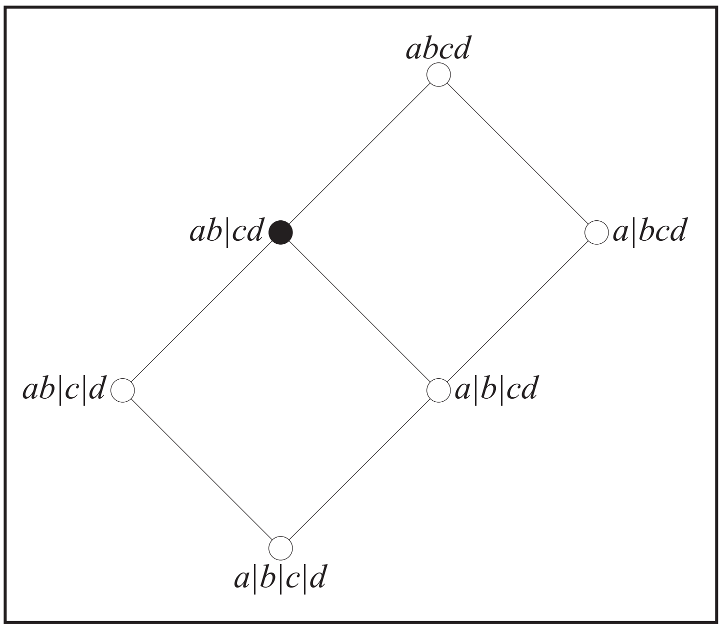
$*$	a	b	c	d
a	b	b	b	b
b	a	b	b	b
c	a	b	c	d
d	a	b	d	c

Rajzolja fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) = (\mathrm{Con}(\mathbf{A});\wedge,\vee)$ háló Hasse-diagramját. Írja le az $\mathbf{A}/\vartheta$ faktorgrupoidokat tetszőleges $\vartheta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$-ra.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az $\mathbf{A}$ algebra főkongruenciái a következők:

$$\begin{array}{ll}
\Theta(a,b) = \{a,b\}^2 \cup \{c\}^2 \cup \{d\}^2, & \Theta(b,c) = \{a\}^2 \cup \{b,c,d\}^2, \\
\Theta(a,c) = 1_A, & \Theta(b,d) = \{a\}^2 \cup \{b,c,d\}^2, \\
\Theta(a,d) = 1_A, & \Theta(c,d) = \{a\}^2 \cup \{b\}^2 \cup \{c,d\}^2.
\end{array}$$

Így $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ Hasse-diagramja a következő:



4. ábra.

A (nem triviális) faktoralgebrák a következők:

- $\mathbf{A}/\Theta(a,b) \cong_\varphi (\mathbb{Z}_3;\,\cdot\,)$, $\varphi\colon A/\Theta(a,b) \to \mathbb{Z}_3$, $\{a,b\} \mapsto \overline{0}$, $\{c\} \mapsto \overline{1}$, $\{d\} \mapsto \overline{2}$;
- $\mathbf{A}/\Theta(c,d) \cong_\varphi (\{0,1,2\};\star)$, $\varphi\colon A/\Theta(c,d) \to \{0,1\}$, $\{a\} \mapsto 0$, $\{b\} \mapsto 1$, $\{c,d\} \mapsto 2$, ahol a $\star$ művelet táblázata a következő:

$\star$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	1
2	0	1	2

- $\mathbf{A}/\Theta(b,c) \cong_\varphi (\{h,i\};\,\to\,)$, $\varphi\colon A/\Theta(a,b) \to \{h,i\}$, $\{a\} \mapsto h$, $\{b,c,d\} \mapsto i$;
- $\mathbf{A}/(\Theta(a,b) \vee \Theta(c,d)) \cong_\varphi (\mathbb{Z}_2;\,\cdot\,)$, $\varphi\colon A/(\Theta(a,b) \vee \Theta(c,d)) \to \mathbb{Z}_2$, $\{a,b\} \mapsto \overline{0}$, $\{c,d\} \mapsto \overline{1}$.

20. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoid kongruenciáinak $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

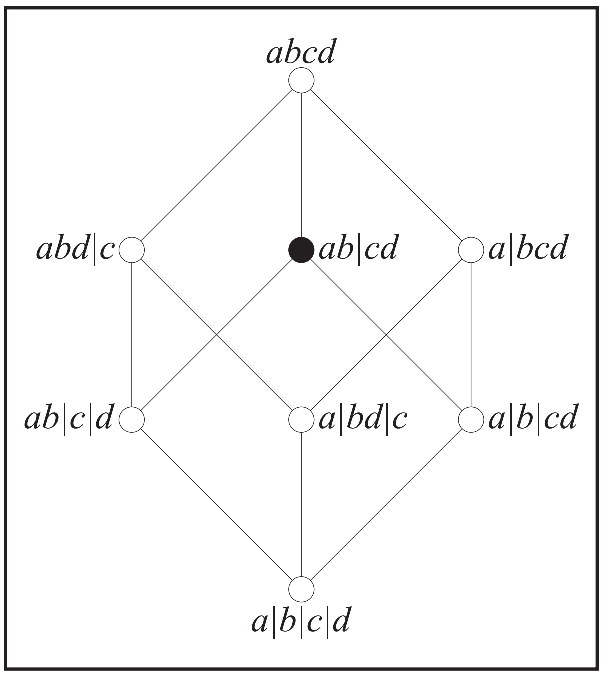
$*$	a	b	c	d
a	a	b	d	d
b	b	b	d	d
c	d	d	c	d
d	d	d	d	d

Rajzolja fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{A}) = (\mathrm{Con}(\mathbf{A}); \wedge, \vee)$ háló Hasse-diagramját. Írja le az $\mathbf{A}/\vartheta$ faktorgrupoidokat tetszőleges $\vartheta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$-ra.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az $\mathbf{A}$ algebra főkongruenciái a következők:

$$\begin{array}{ll} \Theta(a,b) = \{a,b\}^2 \cup \{c\}^2 \cup \{d\}^2, & \Theta(b,c) = \{a\}^2 \cup \{b,c,d\}^2, \\ \Theta(a,c) = 1_A, & \Theta(b,d) = \{a\}^2 \cup \{b,d\}^2 \cup \{c\}^2, \\ \Theta(a,d) = \{a,b,d\}^2 \cup \{c\}^2, & \Theta(c,d) = \{a\}^2 \cup \{b\}^2 \cup \{c,d\}^2. \end{array}$$

Így $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ Hasse-diagramja a következő:

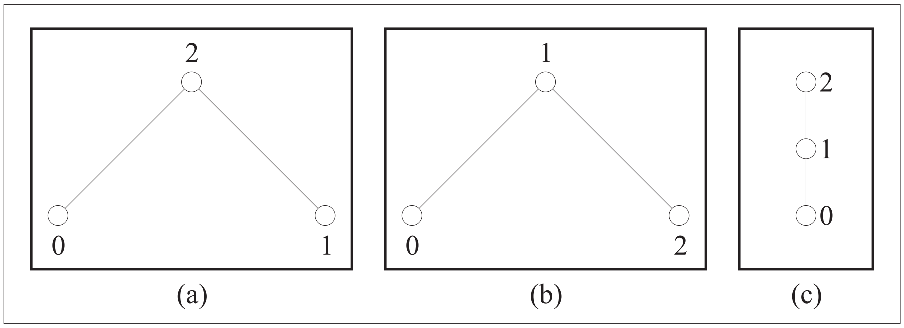


5. ábra.

A (nem triviális) faktoralgebrák a következők:

- $\mathbf{A}/\Theta(a,b) \cong_\varphi (\{0,1,2\}; \vee)$, $\varphi\colon A/\Theta(a,b) \to \{0,1,2\}$, $\{a,b\} \mapsto 0$, $\{c\} \mapsto 1$, $\{d\} \mapsto 2$, ahol az $\vee$ (egyesítés) művelet a 6. ábra (a) részében látható részbenrendezett halmazban számolandó.
- $\mathbf{A}/\Theta(b,d) \cong_\varphi (\{0,1,2\}; \vee)$, $\varphi\colon A/\Theta(b,d) \to \{0,1,2\}$, $\{a\} \mapsto 0$, $\{b,d\} \mapsto 1$, $\{c\} \mapsto 2$, ahol az $\vee$ (egyesítés) művelet a 6. ábra (b) részében látható részbenrendezett halmazban számolandó.
- $\mathbf{A}/\Theta(c,d) \cong_\varphi (\{0,1,2\}; \vee)$, $\varphi\colon A/\Theta(c,d) \to \{0,1,2\}$, $\{a\} \mapsto 0$, $\{b\} \mapsto 1$, $\{c,d\} \mapsto 2$, ahol az $\vee$

(egyesítés) művelet a 6. ábra (c) részében látható részbenrendezett halmazban számolandó.



6. ábra.

- $\mathbf{A}/\Theta(a,d) \cong_\varphi (\{0,1\};\, \wedge\,)$, $\varphi\colon A/\Theta(a,d) \to \{0,1\}$, $\{a,b,d\} \mapsto 0$, $\{c\} \mapsto 1$;
- $\mathbf{A}/\Theta(b,c) \cong_\varphi (\{0,1\};\, \vee\,)$, $\varphi\colon A/\Theta(b,c) \to \{0,1\}$, $\{a\} \mapsto 0$, $\{b,c,d\} \mapsto 1$;
- $\mathbf{A}/(\Theta(a,b) \vee \Theta(c,d)) \cong_\varphi (\{0,1\};\, \vee\,)$, $\varphi\colon A/(\Theta(a,b) \vee \Theta(c,d)) \to \{0,1\}$, $\{a,b\} \mapsto 0$, $\{c,d\} \mapsto 1$.

21. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi algebrák egyszerűek, azaz csak triviális kongruenciáik vannak.

(a) $(\mathbb{Z}_7;\, +\,)$;

(b) $(A; f)$, ahol $A \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és $f\colon A^3 \to A,\ f(a,b,c) = \begin{cases} a, & \text{ha } a = b, \\ c & \text{különben;} \end{cases}$

(c) $(\mathbb{R};\, +\,,\, \cdot\,)$;

(d) $(\{a,b,c,d\};\, *\,)$, ahol a $*$ kétváltozós művelet művelettáblázata a következő (a kipontozott helyek tetszőlegesen kitölthetők):

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	a	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
c	b	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

$\boxed{\text{MEGOLDÁS.}}$ (a) Tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0_{\mathbb{Z}_7}$ kongruenciája a $(\mathbb{Z}_7; +)$ algebrának. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}_7$-re legyen $\varphi_{a,b}$ az alábbi leképezés:

$$\varphi_{a,b}\colon a\alpha^\bullet \to b\alpha^\bullet,\ x \mapsto x + (b-a).$$

Mivel $x \in a\alpha^\bullet$ esetén $(a,x) \in \alpha$, ezért $(a-b, a-b) \in \alpha$ miatt

$$(b, x + (a-b)) = (a + (a-b), x + (a-b)) \in \alpha,$$

azaz $x + (a-b) \in b\alpha^\bullet$. Egyszerűen ellenőrízhető, hogy a $\varphi_{a,b}$ leképezés bijektív. Így azt kapjuk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}_7$-re $|a\alpha^\bullet| = |b\alpha^\bullet|$. Mivel $\mathbb{Z}_7 = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}_7} a\alpha^\bullet$, ezért

$$7 = |\mathbb{Z}_7| = |\bigcup_{a \in \mathbb{Z}_7} a\alpha^\bullet| = |\overline{0}\alpha^\bullet| \cdot n,$$

ahol n az α ekvivalenciareláció szerinti különböző ekvivalencia osztályok száma. Ennek következtében azt kapjuk, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{Z}_7$-re $|a\alpha^\bullet|$ osztója 7-nek. Így α triviális.

(b) Legyen $(a,b) \in A^2 \setminus 0_A$ és legyen c tetszőleges eleme A-nak. Ekkor $(a,b), (a,a), (c,c) \in \Theta(a.b)$ miatt $a = f(a,a,c)\, \Theta(a,b)\, f(b,a,c) = c$, azaz $c \in a\Theta(a,b)^\bullet$. Így $\Theta(a,b) = 1_A$. Ha $\alpha \neq 0_A$ kongruenciája az $(A; f)$ algebrának, akkor van olyan $(a,b) \in A^2 \setminus 0_A$, hogy $(a,b) \in \alpha$. Így $\Theta(a,b) \subseteq \alpha$ miatt $\alpha = 1_A$.

(c) Legyen $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}}$ kongruenciája az $(\mathbb{R};\,+\,,\,\cdot\,)$ algebrának. Legyen $(a,b) \in \alpha \setminus 0_{\mathbb{R}}$ és legyen c tetszőleges valós szám. Mivel $(a,b), (-a,-a) \in \alpha$, ezért (0,b-a)=(a+(-a),b+(-a))$\in \alpha$ és $b-a \neq 0$. Továbbá, $(0,b-a), (c/(b-a), c/b-a)) \in \alpha$ következtében $(0,c) = (0 \cdot c(b-a), (b-a) \cdot c/(b-a)) \in \alpha$. Azaz $0\alpha^{\bullet} = \mathbb{R}$, így $\alpha = 1_{\mathbb{R}}$.

(d) Vizsgáljuk meg a főkongruenciákat.

22. Feladat. Legyen $\mathbf{A} = (A; f)$ monounér algebra, valamint legyen B az $\mathbf{A}$ algebra valamely részalgebrájának alaphalmaza. Legyen $\vartheta_B \subseteq A \times A$ az alábbi reláció:

$$\vartheta_B = \{(a,b) \mid a = b \text{ vagy } \{a,b\} \subseteq B\}\,.$$

Igazolja, hogy ϑ_B kongruenciája $\mathbf{A}$-nak.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Először azt igazoljuk, hogy $\vartheta_B \in \mathrm{Eq}(A)$. Az nyilvánvaló, hogy a ϑ_B reláció reflexív és szimmetrikus. Tegyük fel, hogy $(a,b), (b,c) \in \vartheta_B$. Ha $a = b$ vagy $b = c$, akkor $(a,c) \in \vartheta_B$. Ha $a \neq b$ és $b \neq c$, akkor $\{a,b\}, \{b,c\} \subseteq B$ miatt $\{a,c\} \subseteq \vartheta_B$. Így ϑ_B tranzitív is. Ezzel igazoltuk, hogy ϑ_B ekvivalenciareláció.

Tegyük fel, hogy $(a,b) \in \vartheta_B$. Ha $a = b$, akkor $f(a) = f(b)$ miatt $(f(a), f(b)) \in \vartheta_B$. Ha $a \neq b$, akkor $\{a,b\} \subseteq B$. Mivel B egy részalgebra alaphalmaza, ezért $f(a), f(b) \in B$. Így $\{f(a), f(b)\} \subseteq B$ miatt $(f(a), f(b)) \in \vartheta_B$. Azaz $\vartheta_B \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$.

23. Feladat. Legyen $\mathbf{S} = (S;\,\cdot\,)$ félháló, azaz a $\cdot$ kétváltozós művelet legyen kommutatív, asszociatív és idempotens (azaz tetszőleges $a,b,c \in S$-re $a \cdot b = b \cdot a$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ és $a \cdot a = a$ teljesüljön). Legyen $\leqslant$ az alábbi reláció az S halmazon:

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \cdot b = a \quad (a,b \in S).$$

Mutassa meg, hogy $\leqslant \subseteq S \times S$ részbenrendezés. Adott $a \in S$-re legyen

$$\vartheta_a = \{(b,c) \mid a \leqslant b,c \text{ vagy } a \nleqslant b,c\} \subseteq S \times S.$$

Mutassa meg, hogy ϑ_a az $\mathbf{S}$ algebra kongruenciája.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ *A $\leqslant$ reláció részbenrendezés.* Mivel a $\cdot$ művelet idempotens, ezért minden $a \in S$-re $a \cdot a = a$, azaz $a \leqslant a$. Így $\leqslant$ reflexív.

Tegyük fel, hogy az $a,b \in S$ elemekre $a \leqslant b$ és $b \leqslant a$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} a &= a \cdot b && (a \leqslant b) \\ &= b \cdot a && (\cdot \text{ kommutatív}) \\ &= b, && (b \leqslant a) \end{aligned}$$

azaz $a = b$. Így $\leqslant$ antiszimmetrikus.

Tegyük fel, hogy az $a,b,c \in S$ elemekre $a \leqslant b$ és $b \leqslant c$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} a \cdot c &= (a \cdot b) \cdot c && (a \leqslant b \Longleftrightarrow a = a \cdot b) \\ &= a \cdot (b \cdot c) && (\cdot \text{ asszociatív}) \\ &= a \cdot b && (b \leqslant c \Longleftrightarrow b = b \cdot c) \\ &= a, && (a \leqslant b \Longleftrightarrow a = a \cdot b) \end{aligned}$$

azaz $a \leqslant c$. Így $\leqslant$ tranzitív. Ezzel igazoltuk, hogy $\leqslant$ részbenrendezés.

A ϑ_a reláció ekvivalenciareláció. Mivel ϑ_a reflexivitása és szimmetriája nyilvánvaló, ezért csak ϑ_a tranzitivitását kell igazolni. Tegyük fel, hogy $(b,c), (c,d) \in \vartheta_a$.

(1.) $a \leqslant b,c,d$. Ekkor $a \leqslant b,d$ nyilván teljesül, így $(b,d) \in \vartheta_a$.
(2.) $a \leqslant b,c$ és $a \nleqslant c,d$. Ez nyilván nem lehetséges.
(3.) $a \nleqslant b,c$ és $a \leqslant c,d$. Ez nyilván nem lehetséges.
(4.) $a \nleqslant b,c,d$. Ekkor $a \nleqslant b,d$ nyilván teljesül, így $(b,d) \in \vartheta_a$.

Ezzel igazoltuk, hogy ϑ_a tranzitív, így ekvivalenciareláció.

A ϑ_a ekvivalenciareláció kongruencia. Tegyük fel, hogy $(b,c),(b',c') \in \vartheta_a$. Azt kellne igazolni, hogy $(b\cdot b', c\cdot c') \in \vartheta_a$, azaz $a \leqslant b\cdot b', c\cdot c'$ vagy $a \nleqslant b\cdot b', c\cdot c'$.

(1.) $a \leqslant b,c$ és $a \leqslant b',c'$. Ekkor $a \leqslant b\cdot b'$ és $a \leqslant c\cdot c'$ teljesül, mivel $a\cdot(b\cdot b') = (a\cdot b)\cdot b' = a\cdot b' = a$ és $a\cdot(c\cdot c') = (a\cdot c)\cdot c' = a\cdot c' = a$. Azaz $(b\cdot b', c\cdot c') \in \vartheta_a$

(2.) $a \leqslant b,c$ és $a \nleqslant b',c'$. Ekkor $a\cdot(b\cdot b') = (a\cdot b)\cdot b' = a\cdot b' \neq a$ és $a\cdot(c\cdot c') = (a\cdot c)\cdot c' = a\cdot c' \neq a$ miatt $a \nleqslant b\cdot b', c\cdot c'$. Azaz $(b\cdot b', c\cdot c') \in \vartheta_a$.

(3.) $a \nleqslant b,c$ és $a \leqslant b',c'$. Ekkor $a\cdot(b\cdot b') = a\cdot(b'\cdot b) = (a\cdot b')\cdot b = a\cdot b \neq a$ és $a\cdot(c\cdot c') = a\cdot(c'\cdot c) = (a\cdot c')\cdot c = a\cdot c \neq a$ miatt $a \nleqslant b\cdot b', c\cdot c'$. Azaz $(b\cdot b', c\cdot c') \in \vartheta_a$.

(4.) $a \nleqslant b,c$ és $a \nleqslant b',c'$. Tegyük fel, hogy $a \leqslant b\cdot b'$, azaz $a\cdot(b\cdot b') = a$. Ekkor

$$a\cdot b' = (a\cdot(b\cdot b'))\cdot b' = a\cdot b\cdot(b')^2 = a\cdot b\cdot b' = a,$$

ellent mondva annak, hogy $a \nleqslant b'$. Azaz $a \nleqslant b\cdot b'$, és hasonlóan igazolható az is, hogy $a \nleqslant c\cdot c'$. Így $(b\cdot b', c\cdot c') \in \vartheta_a$.

Ezzel igazoltuk, hogy ϑ_a kongruenciareláció.

24. Feladat. Legyen $\mathbf{L} = (L;\wedge,\vee)$ tetszőleges háló, $a,b \in L$. Bizonyítsa be, hogy $\Theta(a,b) = \Theta(a\wedge b, a\vee b)$.

Megoldás. $\Theta(a\wedge b, a\vee b) \subseteq \Theta(a,b)$: mivel $(a,a),(a,b) \in \Theta(a,b)$, ezért $(a\wedge a, a\wedge b),(a\vee a, a\vee b) \in \Theta(a,b)$, azaz $(a, a\wedge b),(a, a\vee b) \in \Theta(a,b)$. Így $\Theta(a,b)$ tranzitivitása miatt $(a\wedge b, a\vee b) \in \Theta(a,b)$, azaz $\Theta(a\wedge b, a\vee b) \subseteq \Theta(a,b)$.

$\Theta(a,b) \subseteq \Theta(a\wedge b, a\vee b)$: mivel $(a\wedge b, a\vee b),(a,a) \in \Theta(a\wedge b, a\vee b)$, ezért

$$((a\wedge b)\vee a, (a\vee b)\vee a) \in \Theta(a\wedge b, a\vee b),$$

azaz $(a, a\vee b) \in \Theta(a\wedge b, a\vee b)$. Továbbá, $(a\wedge b, a\vee b),(b,b) \in \Theta(a\wedge b, a\vee b)$ következtében

$$((a\wedge b)\vee b, (a\vee b)\vee b) \in \Theta(a\wedge b, a\vee b)$$

is teljesül, azaz $(b, a\vee b) \in \Theta(a\wedge b, a\vee b)$. Így $\Theta(a\wedge b, a\vee b)$ tranzitivitása miatt $(a,b) \in \Theta(a\wedge b, a\vee b)$.

Ezzel igazoltuk, hogy $\Theta(a,b) = \Theta(a\wedge b, a\vee b)$.

25. Feladat. Legyen $\mathbf{L} = (L;\wedge,\vee)$ disztributív háló, valamint $a,b,c,d \in L$ olyan elemek, hogy $a \leqslant b$. Bizonyítsa be, hogy $(c,d) \in \Theta(a,b)$ pontosan akkor teljesül, ha $a\wedge c = a\wedge d$ és $b\vee c = b\vee d$.

Megoldás. Legyen Ψ az alábbi reláció L-en:

$$\Psi = \{(c,d) \mid a\wedge c = a\wedge d \text{ és } b\vee c = b\vee d\}.$$

Egyszerűen látható, hogy $\Psi \in \mathrm{Eq}(L)$. Legyen $(c_1,d_1),(c_2,d_2) \in \Psi$, azaz $a\wedge c_i = a\wedge d_i$ és $b\vee c_i = b\vee d_i$ teljesül minden i-re ($i \in \{1,2\}$). Ekkor

$$\begin{aligned} a\wedge(c_1\wedge c_2) &= (a\wedge c_1)\wedge(a\wedge c_2) \\ &= (a\wedge d_1)\wedge(a\wedge d_2) \\ &= a\wedge(d_1\wedge d_2), \end{aligned}$$

valamint az $\mathbf{L}$ háló disztributivitása miatt

$$\begin{aligned} b\vee(c_1\wedge c_2) &= (b\vee c_1)\wedge(b\vee c_2) \\ &= (b\vee d_1)\wedge(b\vee d_2) \\ &= b\vee(d_1\wedge d_2). \end{aligned}$$

Azaz $(c_1\wedge c_2, d_1\wedge d_2) \in \Psi$. Továbbá, szintén az $\mathbf{L}$ háló disztributivitása miatt

$$\begin{aligned} a\wedge(c_1\vee c_2) &= (a\wedge c_1)\vee(a\wedge c_2) \\ &= (a\wedge d_1)\vee(a\wedge d_2) \\ &= a\wedge(d_1\vee d_2), \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} b \vee (c_1 \vee c_2) &= (b \vee c_1) \vee (b \vee c_2) \\ &= (b \vee d_1) \vee (a \vee d_2) \\ &= b \vee (d_1 \vee d_2). \end{aligned}$$

Azaz $(c_1 \vee c_2, d_1 \vee d_2) \in \Psi$. Ezzel igazoltuk, hogy Ψ kongruenciája az $\mathbf{L}$ hálónak. Mivel $(a, b) \in \Psi$, ezért $\Theta(a, b) \subseteq \Psi$.

Legyen Θ olyan kongruenciája $\mathbf{L}$-nek, amelyre $(a, b) \in \Theta$ teljesül, valamint legyen $(x, y) \in \Psi$ tetszőleges elem. Ekkor $(a \wedge b, a \vee b) \in \Theta$, és így

$$\begin{aligned} x &= x \vee (x \wedge (a \wedge b)) = x \vee (y \wedge (a \wedge b)) = (x \vee y) \wedge (x \vee (a \wedge b)) \,\Theta\, (x \vee y) \wedge (x \vee (a \vee b)) \\ &= (x \vee y) \wedge (y \vee (a \vee b)) = y \vee (x \wedge (a \vee b)) \,\Theta\, y \vee (x \wedge (a \wedge b)) = y \vee (y \wedge (a \wedge b)) = y \end{aligned}$$

miatt $(x, y) \in \Theta$, azaz $\Psi \subseteq \Theta$. Így $\Theta(a, b) = \Psi$.