5. Feladatsor

Matematikai Struktúrák (MMN103G)

2009/2010. őszi félév

Részalgebrák

1. Feladat. Legyen $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Lehet-e az $\mathbf{A} = (P(X); F)$ algebrában a H halmaz valamely részalgebra alaphalmaza?

(a) $F = \{\Delta, \overline{}\}$, $H = \{Y \subseteq X \mid Y$ elemszáma páros$\}$;
(b) $F = \{\cup, \overline{}\}$, $H = \{Y \subseteq X \mid Y$ elemszáma páros$\}$.

2. Feladat. Lehet-e az $\mathbf{A} = (R[x]; F)$ algebrában a H halmaz valamely részalgebra alaphalmaza?

(a) $F = \{\,+\,,\,\cdot\,\}$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(2009) = 0\}$;
(b) $F = \{\,\cdot\,\}$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(2009) \neq 0\}$;
(c) $F = \{\,+\,,\,\cdot\,\}$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(2009) \neq 0\}$.

3. Feladat. Határozza meg az $X \subseteq A$ halmaz által generált részalgebrát az $\mathbf{A}_1 = (A; F_1)$, $\mathbf{A}_2 = (A; F_2)$ és $\mathbf{A}_3 = (A; F_3)$ algebrákban.

(a) $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$, $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ prímszám$\}$, $F_1 = \{\,\cdot\,\}$, $F_2 = \{\,\cdot\,, {}^{-1}\}$, $F_3 = \{\,+\,\}$;
(b) $A = \mathbb{C}$, $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, $F_1 = \{\,\cdot\,\}$, $F_2 = \{\,+\,\}$, $F_3 = \{\,+\,,\,\cdot\,\}$;
(c) $A = \mathbb{R}$, $X = \{0, 1\}$,
$F_1 = \{A_2\}$, $F_2 = \{A_2, A_3\}$, $F_3 = \{A_k \mid k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2\}$, ahol tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re A_k az alábbi k-változós művelet:
$$A_k\colon A^k \to A,\ A_k(a_1, \ldots, a_k) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n};$$
(d) $A = \mathbb{R}[x]$, $X = \{3, x^2\}$, $F_1 = \{\,+\,,\,-\,\}$, $F_2 = \{\,\cdot\,\}$, $F_3 = \{\,+\,,\,-\,,\,\cdot\,\}$;
(e) $A = P(\mathbb{N})$, $X = \{H \in A \mid H$ elemszáma kettő$\}$, $F_1 = \{\,\cup\,\}$, $F_2 = \{\,\cap\,\}$, $F_3 = \{\,\cup\,,\,\cap\,\}$.

4. Feladat. Határozza meg a $(\mathbb{Z};\,+\,,\,-\,)$ algebra minimális generátorrendszereit.

5. Feladat. Legyen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x + 1$ és $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto -x$. Mutassa meg, hogy a $(\mathbb{Z}; f, g)$ algebrának nincs valódi részalgebrája.

6. Feladat. Határozza meg az $(\mathbb{N}; +)$, $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Z}_6; +)$, $(\{a, b, c, d\}; \circledast)$ és $(\{a, b, c, d\}; \circledcirc)$ algebrák összes egy-, illetve kételemű generátorrendszerét, ahol

$\circledast$	a	b	c	d
a	b	c	c	c
b	b	b	b	b
c	c	b	c	c
d	d	c	b	d

és

$\circledcirc$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	b	a	d	b
c	a	c	d	c
d	c	b	c	c

.