# 5. Feladatsor

Matematikai Struktúrák (MMN103G)

2009/2010. őszi félév

**Részalgebrák**

**1. Feladat.** Legyen $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Lehet-e az $\mathbf{A} = (P(X); F)$ algebrában a $H$ halmaz valamely részalgebra alaphalmaza?

(a) $F = \{\Delta, \overline{\phantom{x}}\}$, $H = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ elemszáma páros}\}$;
(b) $F = \{\cup, \overline{\phantom{x}}\}$, $H = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ elemszáma páros}\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) Igen. Gondoljuk meg, hogy $|Y \,\Delta\, Y'| = |Y| + |Y'| - 2 \cdot |Y \cap Y'|$ és $|\overline{Y}| = |X| - |Y|$.
(b) Nem. Gondoljuk meg, hogy $|Y \cup Y'| = |Y| + |Y'| - |Y \cap Y'|$.

**2. Feladat.** Lehet-e az $\mathbf{A} = (R[x]; F)$ algebrában a $H$ halmaz valamely részalgebra alaphalmaza?

(a) $F = \{\,+\,,\,\cdot\,\}$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(2009) = 0\}$;
(b) $F = \{\,\cdot\,\}$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(2009) \neq 0\}$;
(c) $F = \{\,+\,,\,\cdot\,\}$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(2009) \neq 0\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) igen; (b) igen; (c) nem, mivel nem zárt a $+$ műveletre.
Gondoljuk meg, hogy tetszőleges $p, q \in \mathbb{R}[x]$-re $(p \star q)(2009) = p(2009) \star q(2009)$ teljesül, ahol $\star \in \{+, \cdot\}$. Valamint, használjuk fel, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$-re, ha $a, b \neq 0$, akkor $ab \neq 0$.

**3. Feladat.** Határozza meg az $X \subseteq A$ halmaz által generált részalgebrát az $\mathbf{A}_1 = (A; F_1)$, $\mathbf{A}_2 = (A; F_2)$ és $\mathbf{A}_3 = (A; F_3)$ algebrákban.

(a) $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$, $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prímszám}\}$, $F_1 = \{\,\cdot\,\}$, $F_2 = \{\,\cdot\,, {}^{-1}\}$, $F_3 = \{\,+\,\}$;
(b) $A = \mathbb{C}$, $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, $F_1 = \{\,\cdot\,\}$, $F_2 = \{\,+\,\}$, $F_3 = \{\,+\,,\,\cdot\,\}$;
(c) $A = \mathbb{R}$, $X = \{0, 1\}$,
$F_1 = \{A_2\}$, $F_2 = \{A_2, A_3\}$, $F_3 = \{A_k \mid k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2\}$, ahol tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re $A_k$ az alábbi $k$-változós művelet:
$$A_k\colon A^k \to A,\ A_k(a_1, \ldots, a_k) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n};$$
(d) $A = \mathbb{R}[x]$, $X = \{3, x^2\}$, $F_1 = \{\,+\,,\,-\,\}$, $F_2 = \{\,\cdot\,\}$, $F_3 = \{\,+\,,\,-\,,\,\cdot\,\}$;
(e) $A = P(\mathbb{N})$, $X = \{H \in A \mid H \text{ elemszáma kettő}\}$, $F_1 = \{\,\cup\,\}$, $F_2 = \{\,\cap\,\}$, $F_3 = \{\,\cup\,,\,\cap\,\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) $\langle X \rangle_{\mathbf{A}_1} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, gondoljuk meg, hogy minden $n > 1$ egész előáll prímszámok szorzataként.
$\langle X \rangle_{\mathbf{A}_2} = A$, gondoljuk meg, hogy $\mathbb{N} \subseteq \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$, és így $A \subseteq \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$ $(\subseteq A)$.
$\langle X \rangle_{\mathbf{A}_3} = A$, gondoljuk meg, hogy ha az $\mathbf{B} = (B; F)$ és $\mathbf{B}' = (B; F')$ algebrákra $F \subseteq F'$ teljesül, akkor tetszőleges $Y \subseteq B$-re igaz, hogy $\langle Y \rangle_{\mathbf{B}} \subseteq \langle Y \rangle_{\mathbf{B}'}$, és használjuk fel az előző eredményt.

(b) $\langle X \rangle_{\mathbf{A}_1} = X$, mivel $X \leqslant \mathbf{A}_1$. Használjuk fel, hogy tetszőleges $v, w \in \mathbb{C}$-re $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$ teljesül, így ha $v, w \in X (\Longleftrightarrow |v|, |w| \leqslant 1)$, akkor $|v \cdot w| = |v| \cdot |w| \leqslant 1$ miatt $vw \in X$.
$\langle X \rangle_{\mathbf{A}_2} = \mathbb{C}$. Legyen $z \neq 0$ tetszőleges komplex szám, melynek trigonometrikus alakja $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, ahol $r$ pozitív valós szám és $\varphi \in [0, 2\pi)$, és így $\varepsilon = \cos\varphi + i \sin\varphi \in X$. Ha $r \leqslant 1$, akkor $z \in X$. Tegyük fel, hogy $r \geqslant 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} z &= \lfloor r \rfloor \cdot \varepsilon + \{r\} \cdot \varepsilon \\ &= \underbrace{\varepsilon + \cdots + \varepsilon}_{\lfloor r \rfloor \text{ darab}} + \{r\} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

miatt $z \in \langle X \rangle$, mivel $\{r\} \cdot \varepsilon \in X$.
$\langle X \rangle_{\mathbf{A}_3} = \mathbb{C}$, mivel $F_2 \subseteq F_3$ miatt $\mathbb{C} = \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2} \subseteq \langle X \rangle_{\mathbf{A}_3}$ $(\subseteq \mathbb{C})$.

(c) $\langle X \rangle_{\mathbf{A}_1} = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n \text{ egész} \right\}$. Először mutassuk meg teljes indukcióval, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$-ra $\frac{k}{2^n} \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_1}$, ahol $0 \leqslant k \leqslant 2^n$ egész szám. Majd mutassuk meg, hogy

$$\left\{ \frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n \text{ egész} \right\}$$

részalgebra $\mathbf{A}_1$-ben.
$\langle X \rangle_{\mathbf{A}_2} = \left\{ \frac{k}{2^m 3^n} \mid m, n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leqslant k \leqslant 2^m 3^n \text{ egész} \right\}$. Először megmutatjuk $(m+n)$ szerinti teljes indukcióval, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$-ra $\frac{k}{2^m 3^n} \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$, ahol $0 \leqslant k \leqslant 2^m 3^n$ egész szám.

- Ha $m + n = 0$, akkor $m = n = 0$ így $\frac{k}{2^m 3^n} \in \{0, 1\} \subseteq \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$, ha $0 \leqslant k \leqslant 1$.
- Indukciós feltevés: tegyük fel, hogy Ha $m + n = s$-re igaz az állítás, azaz ha $m + n = s$ és $0 \leqslant k \leqslant 2^m 3^n$ egész, akkor $\frac{k}{2^m 3^n} \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$.
- Tegyük fel, hogy $m+n = s+1$ és $0 \leqslant k \leqslant 2^m 3^n$. Legyen $k = 6l+r$, ahol $l \in \mathbb{N}_0$ és $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
  Ha $r = 0$, akkor

  $$\frac{k}{2^m 3^n} = \frac{l}{2^{m-1} 3^{n-1}} \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$$

  az indukciós feltevés következtében, mivel $(m-1) + (n-1) \leqslant s$, $l = k/6 \leqslant 2^{m-1} 3^{n-1}$.
  Ha $r = 1$, akkor

  $$\frac{k}{2^m 3^n} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{3l}{2^{m-1} 3^n} + \frac{3l+1}{2^{m-1} 3^n} \right) \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2},$$

  mivel az indukciós feltevés következtében $\frac{3l}{2^{m-1} 3^n}, \frac{3l+1}{2^{m-1} 3^n} \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$, hiszen $(m-1) + n \leqslant s$ és $0 \leqslant 3l < 3l + 1 \leqslant 2^{m-1} 3^n$.
  Ha $r = 2$, akkor

  $$\frac{k}{2^m 3^n} = \frac{3l+1}{2^{m-1} 3^n} \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$$

  az indukciós feltevés következtében, mivel $(m-1) + n \leqslant s$, $3l + 1 \leqslant 2^{m-1} 3^n$.
  Ha $r = 3$, akkor

  $$\frac{k}{2^m 3^n} = \frac{2l+1}{2^m 3^{n-1}} \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$$

  az indukciós feltevés következtében, mivel $m + (n-1) \leqslant s$, $2l + 1 \leqslant 2^m 3^{n-1}$.
  Ha $r = 4$, akkor

  $$\frac{k}{2^m 3^n} = \frac{3l+2}{2^{m-1} 3^n} \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$$

  az indukciós feltevés következtében, mivel $(m-1) + n \leqslant s$, $3l + 2 \leqslant 2^{m-1} 3^n$.
  Ha $r = 5$, akkor

  $$\frac{k}{2^m 3^n} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{l+1}{2^{m-1} 3^{n-1}} + \frac{l+1}{2^{m-1} 3^{n-1}} + \frac{2l+1}{2^m 3^{n-1}} \right) \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2},$$

  mivel az indukciós feltevés következtében $\frac{l+1}{2^{m-1} 3^{n-1}}, \frac{2l+1}{2^m 3^{n-1}} \in \langle X \rangle_{\mathbf{A}_2}$, hiszen $(m-1) + (n-1), m + (n-1) \leqslant s$ és $0 \leqslant l + 1 \leqslant 2^{m-1} 3^{n-1}$ és $0 \leqslant 2l + 1 \leqslant 2^m 3^{n-1}$. Ezzel az állítást igazoltuk.

Majd mutassuk meg, hogy

$$\left\{\frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n \text{ egész}\right\}$$

részalgebra $\mathbf{A}_1$-ben.
$\langle X\rangle_{\mathbf{A}_3} = A$.
(d) $\langle X\rangle_{\mathbf{A}_1} = \{ax^2 + 3b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$,
$\langle X\rangle_{\mathbf{A}_2} = \{3^m x^{2n} \mid m, n \in \mathbb{N}_0,\ m^2 + n^2 > 0\}$,
$\langle X\rangle_{\mathbf{A}_3} = \{ax^2 + 3b \mid a \in \mathbb{Z}[x],\ b \in \mathbb{Z}\}$.
(e) $\langle X\rangle_{\mathbf{A}_1} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| \geqslant 2 \text{ és } X \text{ véges}\}$,
$\langle X\rangle_{\mathbf{A}_2} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| \leqslant 2\}$,
$\langle X\rangle_{\mathbf{A}_3} = P(\mathbb{N})$.

**4. Feladat.** Határozza meg a $(\mathbb{Z};\, +\,,\, -\,)$ algebra minimális generátorrendszereit.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az $X \subseteq \mathbb{Z}$ halmaz pontosan akkor minimális generátorrendszer, ha ln.k.o.$(X) = 1$ és bármely $Y \subsetneq X$-re ln.k.o.$(Y) > 1$. Minimális generátorrendszerek például: $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 5 \cdot 2\}$, $\{2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7\}$, stb.

**5. Feladat.** Legyen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x + 1$ és $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto -x$. Mutassa meg, hogy a $(\mathbb{Z}; f, g)$ algebrának nincs valódi részalgebrája.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Legyen $\emptyset \subsetneq X \subseteq \mathbb{Z}$ részalgebrája a $(\mathbb{Z}; f, g)$ algebrának. Ha $X \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$, akkor legyen $n \in X \cap \mathbb{N}$. Ekkor

$$0 = ((\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ darab}}) \circ g)(n).$$

Ha $X \cap \{z \in \mathbb{N} \mid z < 0\} \neq \emptyset$, akkor legyen $n \in X$, $n < 0$. Ekkor

$$0 = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ darab}})(n).$$

Így azt kapjuk, hogy $0 \in X$. Mivel $\langle 0\rangle = \mathbb{Z}$, ezért $\langle X\rangle = \mathbb{Z}$.

**6. Feladat.** Határozza meg az $(\mathbb{N}; +)$, $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Z}_6; +)$, $(\{a, b, c, d\}; \circledast)$ és $(\{a, b, c, d\}; \circledcirc)$ algebrák összes egy-, illetve kételemű generátorrendszerét, ahol

| $\circledast$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $c$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $c$ | $c$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $b$ | $d$ |

és

| $\circledcirc$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $c$ | $d$ | $c$ |
| $d$ | $c$ | $b$ | $c$ | $c$ |

.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Egyelemű generátorrendszerek:
Legyen $x \in \mathbb{N}$. Ekkor $\langle x\rangle = (\mathbb{N}; +)$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 1$.
$(\mathbb{Z}; +)$-nak nincs egyelemű generátorrendszere.
Legyen $x \in \mathbb{Z}_6$. Ekkor $\langle x\rangle = (\mathbb{Z}_6; +)$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in \{\overline{1}, \overline{5}\}$.
Legyen $x \in \{a, b, c, d\}$. Ekkor $\langle x\rangle = (\{a, b, c, d\}; \circledast)$ pontosan akkor teljesül, ha $x = a$.
Legyen $x \in \{a, b, c, d\}$. Ekkor $\langle x\rangle \subsetneq (\{a, b, c, d\}; \circledcirc)$.
Kételemű generátorrendszerek:
Legyen $x, y \in \mathbb{N}$, $(x \neq y)$. Ekkor $\langle x, y\rangle = (\mathbb{N}; +)$ pontosan akkor teljesül, ha $1 \in \{x, y\}$.
Legyen $x, y \in \mathbb{Z}$, $(x \neq y)$. Ekkor $\langle x, y\rangle = (\mathbb{Z}; +)$ pontosan akkor teljesül, ha $x \cdot y < 0$ és ln.k.o.$(x, y) = 1$.
Legyen $x, y \in \mathbb{Z}_6$, $(x \neq y)$. Ekkor $\langle x, y\rangle = (\mathbb{Z}_6; +)$ pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) \in \{(\overline{u}, \overline{v}) \mid \text{ln.k.o.}(u, v) = 1\}$ vagy $\{x, y\} \cap \{\overline{1}, \overline{5}\} \neq \emptyset$.
Legyen $x, y \in \{a, b, c, d\}$, $(x \neq y)$. Ekkor $\langle x, y\rangle = (\{a, b, c, d\}; \circledast)$ pontosan akkor teljesül, ha $a \in \{x, y\}$.
Legyen $x \in \{a, b, c, d\}$, $(x \neq y)$. Ekkor $\langle x, y\rangle = (\{a, b, c, d\}; \circledcirc)$ pontosan akkor teljesül, ha $\{x, y\} \neq \{a, b\}, \{c, d\}$.