

---

---

---

---

---

---

4. FELADATSOR  
MATEMATIKAI STRUKTÚRÁK (MMN103G)  
2009/2010. ŐSZI FÉLÉV

---

### Hálók

---

Azt mondjuk, hogy **az  $\mathbf{L}$  háló ábrázolható halmazokkal**, ha van olyan  $X$  halmaz és  $H \subseteq P(X)$ , hogy  $(H; \cap, \cup)$  háló, amely izomorf  $\mathbf{L}$ -l.

---

**1. Feladat.** Mutassuk meg, hogy ha az  $\mathbf{L}$  háló ábrázolható halmazokkal, akkor bármely  $a, b, c \in L$ -re teljesül, hogy  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ .

**2. Feladat.** Mutassuk meg, hogy bármely háló tetszőleges  $a, b, c$  elemére teljesülnek az

$$\begin{aligned}(a \wedge c) \vee (b \wedge c) &\leq (a \vee b) \wedge c, \\ (a \wedge b) \vee c &\leq (a \vee c) \wedge (b \vee c), \\ (a \wedge c) \vee (b \wedge c) &\leq ((a \wedge c) \vee b) \wedge c\end{aligned}$$

egyenlőtlenségek.

**3. Feladat.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $\mathbf{L}$  hálóra az alábbi állítások ekvivalensek:

- bármely  $a, b, c \in L$ -re, ha  $a \leq c$ , akkor  $(a \vee b) \wedge c \leq a \vee (b \wedge c)$ ,
- bármely  $a, b, c \in L$ -re, ha  $c \leq a$ , akkor  $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee c$ ,
- bármely  $a, b, c \in L$ -re  $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c$ .

Mutassunk olyan legalább ötelemű  $\mathbf{L}_1$ , illetve  $\mathbf{L}_2$  hálót, amelyben teljesülnek, illetve nem teljesülnek a fentiek.

**4. Feladat.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $\mathbf{L}$  hálóra az alábbi állítások ekvivalensek:

- bármely  $a, b, c \in L$ -re  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ,
- bármely  $a, b, c \in L$ -re  $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ .

Mutassunk olyan legalább ötelemű  $\mathbf{L}_1$ , illetve  $\mathbf{L}_2$  hálót, amelyben teljesülnek, illetve nem teljesülnek a fentiek.

---

Legyen  $\mathbf{L}$  tetszőleges korlátos háló,  $a, b \in L$ . Azt mondjuk, hogy a  $b$  elem **komplementuma**  $a$ -nak, ha  $a \wedge b = 0$  és  $a \vee b = 1$ .

---

**5. Feladat.** Mutassunk olyan legalább ötelemű véges hálót, amelyben

- (a) egyik elemnek sincs komplementuma,
- (b) van olyan elem, amelynek van és van olyan elem, amelynek nincs komplementuma,
- (c) minden elemnek van komplementuma.

Amikor van komplementum, akkor egyértelmű-e az?

**6. Feladat.** Legyen  $X$  tetszőleges halmaz,  $A, B \subseteq X$ . Igaz-e, hogy ha  $A \cap B = \emptyset$  és  $A \cup B = X$ , akkor  $B = X \setminus A$ ?

**7. Feladat.** Tekintsük az  $A/\alpha$  ekvivalenciarelációt az  $A$  halmazon, amelyet a hozzájuk tartozó osztályozással adtunk meg:

- (a)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A/\alpha = 1|23|4$ ,
- (b)  $A = \{a, c, e, k, m\}$ ,  $A/\alpha = aem|ck$ ,
- (c)  $A = \{a, c, e, k, m\}$ ,  $A/\alpha = ae|km|c$ ,
- (d)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A/\alpha = 123|45|67|8$ .

Van-e  $\alpha$ -nak komplementuma  $\text{Eq}(A)$ -ban? Egyértelmű-e a komplementum, ha létezik.

### Részalgebrák

**8. Feladat.** Legyen  $A = \{a, b, c, d\}$  és  $\mathbf{A} = (A; *)$ , ahol  $*$  az alábbi kétváltozós művelet:

	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>*</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td></tr> </table>	$*$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$b$	$b$	$a$	$d$	$c$	$c$	$c$	$d$	$a$	$b$	$d$	$d$	$c$	$b$	$a$	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>*</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td></tr> </table>	$*$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$a$	$b$	$c$	$c$	$b$	$a$	$b$	$c$	$c$	$c$	$d$	$d$	$b$	$b$	$d$	$c$	$d$	$b$	$a$	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>*</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td></tr> </table>	$*$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$b$	$c$	$c$	$c$	$b$	$b$	$b$	$b$	$b$	$c$	$c$	$b$	$c$	$c$	$d$	$d$	$c$	$b$	$d$	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>*</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>a</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>d</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>b</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>c</math></td></tr> </table>	$*$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$b$	$a$	$c$	$d$	$b$	$b$	$a$	$d$	$b$	$c$	$a$	$c$	$d$	$c$	$d$	$c$	$b$	$c$	$c$
$*$	$a$	$b$	$c$	$d$																																																																																																				
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$																																																																																																				
$b$	$b$	$a$	$d$	$c$																																																																																																				
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$																																																																																																				
$d$	$d$	$c$	$b$	$a$																																																																																																				
$*$	$a$	$b$	$c$	$d$																																																																																																				
$a$	$a$	$b$	$c$	$c$																																																																																																				
$b$	$a$	$b$	$c$	$c$																																																																																																				
$c$	$d$	$d$	$b$	$b$																																																																																																				
$d$	$c$	$d$	$b$	$a$																																																																																																				
$*$	$a$	$b$	$c$	$d$																																																																																																				
$a$	$b$	$c$	$c$	$c$																																																																																																				
$b$	$b$	$b$	$b$	$b$																																																																																																				
$c$	$c$	$b$	$c$	$c$																																																																																																				
$d$	$d$	$c$	$b$	$d$																																																																																																				
$*$	$a$	$b$	$c$	$d$																																																																																																				
$a$	$b$	$a$	$c$	$d$																																																																																																				
$b$	$b$	$a$	$d$	$b$																																																																																																				
$c$	$a$	$c$	$d$	$c$																																																																																																				
$d$	$c$	$b$	$c$	$c$																																																																																																				

Határozzuk meg az  $\mathbf{A}$  algebra részalgebráinak  $\text{Sub}(\mathbf{A})$  halmazát, majd rajzoljuk fel a  $(\text{Sub}(\mathbf{A}); \subseteq)$  részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.

Az  $\mathbf{A}$  algebra **monounér**, ha egyetlen egyváltozós alapl művelete van. Ha  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), akkor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

jelöli az  $A \rightarrow A$ ,  $k \mapsto a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) unér műveletet.

**9. Feladat.** Határozzuk meg az  $\mathbf{A} = (A; f)$  monounér algebra részalgebráinak  $\text{Sub}(\mathbf{A})$  halmazát.

- (a)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
- (b)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
- (c)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
- (d)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
- (e)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$
- (f)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Rajzoljuk fel a  $(\text{Sub}(\mathbf{A}); \subseteq)$  részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.