4. Feladatsor

Matematikai Struktúrák (MMN103G)

2009/2010. őszi félév

Hálók

Azt modjuk, hogy **az L háló ábrázolható halmazokkal**, ha van olyan X halmaz és $H \subseteq P(X)$, hogy $(H; \cap, \cup)$ háló, amely izomorf **L**-lel.*

---

1. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha az **L** háló ábrázolható halmazokkal, akkor bármely $a, b, c \in L$-re teljesül, hogy $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Megoldás. Tegyük fel, hogy **L** ábrázolható halmazokkal. Legyen $\varphi\colon L \to H$ izomorfizmus, ahol $H \subseteq P(X)$ teljesül valamely X halmazra és $(H; \cap, \cup)$ háló. Legyenek a, b és c tetszőleges elemei L-nek, továbbá legyen $A = a\varphi$, $B = b\varphi$ és $C = c\varphi$. Mivel $\cap$ disztributív $\cup$-ra vonatkozóan, ezért

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) &\Longrightarrow a\varphi \cap (b\varphi \cup c\varphi) = (a\varphi \cap b\varphi) \cup (a\varphi \cap c\varphi) \\ &\Longrightarrow a\varphi \cap (b \vee c)\varphi = (a \wedge b)\varphi \cup (a \wedge c)\varphi \\ &\Longrightarrow (a \wedge (b \vee c))\varphi = ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))\varphi \\ &\Longrightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \end{aligned}$$

Az átalakítások során többször felhasználtuk, hogy φ homomorfizmus és injektív.

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy bármely háló tetszőleges a, b, c elemére teljesülnek az

$$\begin{aligned} (a \wedge c) \vee (b \wedge c) &\leqslant (a \vee b) \wedge c, \\ (a \wedge b) \vee c &\leqslant (a \vee c) \wedge (b \vee c), \\ (a \wedge c) \vee (b \wedge c) &\leqslant ((a \wedge c) \vee b) \wedge c \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek.

Megoldás. Valamennyi egyenlőtlenség azon múlik, hogy ha az **L** háló p, q, r, s elemeire $p, q \leqslant r, s$ teljesül, akkor $p \vee q \leqslant r \wedge s$.

3. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges **L** hálóra az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) bármely $a, b, c \in L$-re, ha $a \leqslant c$, akkor $(a \vee b) \wedge c \leqslant a \vee (b \wedge c)$,

(ii) bármely $a, b, c \in L$-re, ha $c \leqslant a$, akkor $a \wedge (b \vee c) \leqslant (a \wedge b) \vee c$,

(iii) bármely $a, b, c \in L$-re $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c$.

Mutassunk olyan legalább ötelemű $\mathbf{L}_1$, illetve $\mathbf{L}_2$ hálót, amelyben teljesülnek, illetve nem teljesülnek a fentiek.

Megoldás. (i)$\Longrightarrow$(ii): mivel $c \leqslant a$, ezért (i) szerint $(c \vee b) \wedge a \leqslant c \vee (b \wedge a)$, ami a $\wedge$ és $\vee$ műveletek kommutativitása miatt ekvivalen (ii)-vel.
(ii)$\Longrightarrow$(iii): mivel $a \wedge c \leqslant c$, ezért (ii) szerint $c \wedge (b \vee (a \wedge c)) \leqslant (c \wedge b) \vee (a \wedge c)$, azaz a $\wedge$ és $\vee$ műveletek

---

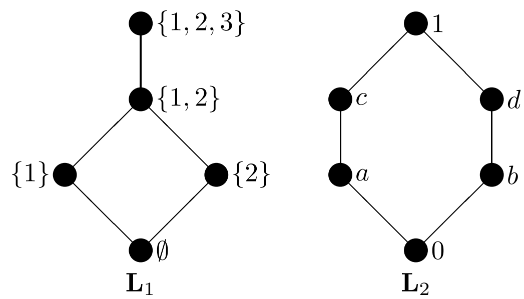
*Azaz van olyan $\varphi\colon L \to H$ bijektív leképezés, amelyre

$$\begin{aligned} (a \wedge b)\varphi &= a\varphi \cap b\varphi \\ (a \vee b)\varphi &= a\varphi \cup b\varphi \end{aligned}$$

teljesül tetszőleges $a, b \in L$-re.

kommutativitása miatt $((a \wedge c) \vee b) \wedge c \leqslant (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$. Az előző feladat harmadik egyenlőtlenségét felhasználva adódik az egyenlőség.
(iii)$\Longrightarrow$(i): ha $a \leqslant c$, akkor $a \wedge c = a$ miatt (iii) felhasználásával adódik, hogy $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$. Így $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c$, azaz (i) is teljesül.

Tekintsük az alábbi $\mathbf{L}_1 = (\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}; \cap, \cup)$, illetve $\mathbf{L}_2 = (\{0, a, b, c, d, 1\}; \wedge, \vee)$ hálókat:



Ekkor $\mathbf{L}_1$-ben teljesül (i), míg $\mathbf{L}_2$-ben nem.

4. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{L}$ hálóra az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) bármely $a, b, c \in L$-re $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

(ii) bármely $a, b, c \in L$-re $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$.

Mutassunk olyan legalább ötelemű $\mathbf{L}_1$, illetve $\mathbf{L}_2$ hálót, amelyben teljesülnek, illetve nem teljesülnek a fentiek.

Legyen $\mathbf{L}$ tetszőleges korlátos háló, $a, b \in L$. Azt mondjuk, hogy a b elem **komplementuma** a-nak, ha $a \wedge b = 0$ és $a \vee b = 1$.

---

5. Feladat. Mutassunk olyan legalább ötelemű véges hálót, amelyben

(a) egyik elemnek sincs komplementuma,

(b) van olyan elem, amelynek van és van olyan elem, amelynek nincs komplemenetuma,

(c) minden elemnek van komplementuma.

Amikor van komplementum, akkor egyértelmű-e az?

MEGOLDÁS. (a) Ilyen háló nincs. Ha $\mathbf{L}$ véges háló, akkor korlátos is, és 0 (egyetlen) komplementuma 1.

(b) Tekintsük a 3. Feladatbeli $\mathbf{L}_1$ hálót. Az $\emptyset$ komplementuma $\{1,2,3\}$, az $\{1\}$ elemnek azonban nincs komplementuma.

(c) A 3. Feladatbeli $\mathbf{L}_2$ háló minden elemének van komplementuma.

6. Feladat. Legyen X tetszőleges halmaz, $A, B \subseteq X$. Igaz-e, hogy ha $A \cap B = \emptyset$ és $A \cup B = X$, akkor $B = X \setminus A$?

MEGOLDÁS. Legyen x tetszőleges eleme X-nek. Ekkor

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow x \notin A \stackrel{x \in X = A \cup B}{\Longrightarrow} x \in B,$$
$$x \in B \stackrel{A \cap B = \emptyset}{\Longrightarrow} x \notin A, \Longleftrightarrow x \in \overline{A}.$$

Azaz $B = \overline{A}$.

7. Feladat. Tekintsük az A/α ekvivalenciarelációt az A halmazon, amelyet a hozzájuk tartozó osztályozással adtunk meg:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A/\alpha = 1|23|4$,

(b) $A = \{a, c, e, k, m\}$, $A/\alpha = aem|ck$,

(c) $A = \{a, c, e, k, m\}$, $A/\alpha = ae|km|c$,

(d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A/\alpha = 123|45|67|8$.

Van-e α-nak komplementuma $\mathrm{Eq}(A)$-ban? Egyértelmű-e a komplementum, ha létezik?

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) α komplementumai:

$$\{1, 2, 4\}^2 \cup \{3\}^2, \quad \{1, 3\}^2 \cup \{2, 4\}^2, \quad \{1, 3, 4\}^2 \cup \{2\}^2, \quad \{1, 2\}^2 \cup \{3, 4\}^2.$$

(b) α-nak van komplementuma, pl.:

$$\{a\}^2 \cup \{c, m\}^2 \cup \{e\}^2 \cup \{k\}^2, \quad \{a\}^2 \cup \{c\}^2 \cup \{e\}^2 \cup \{k, m\}^2.$$

(c) α-nak van komplementuma, pl.:

$$\{a\}^2 \cup \{c, b\}^2 \cup \{e, k\}^2, \quad \{a, k\}^2 \cup \{c, m\}^2 \cup \{e\}^2.$$

(d) α-nak van komplementuma, pl.:

$$\{1, 2\}^2 \cup \{3, 4\}^2 \cup \{5, 6\}^2 \cup \{7, 8\}^2, \quad \{1, 3\}^2 \cup \{2, 4\}^2 \cup \{5, 6\}^2 \cup \{7, 8\}^2.$$

* * *

Legyen A véges halmaz, $\alpha \in \mathrm{Eq}(A)$. Az α-hoz tartozó különböző ekvivaleniaosztályok legyenek

$$C_1, \ldots, C_r.$$

Válasszunk minden osztályból egy-egy elemet: $c_i \in C_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Legyen β az

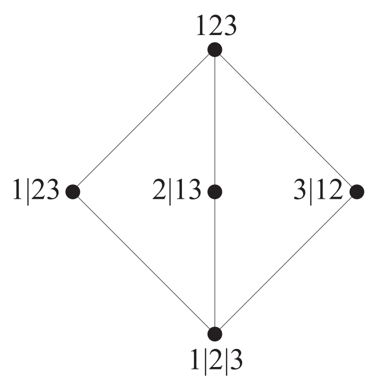
$$\{c_1, \ldots, c_r\}^2 \cup \bigcup_{c \in A \setminus \{c_1, \ldots, c_r\}} \{c\}^2.$$

Legyen $a, b \in A$, és tegyük fel, hogy $(a, b) \in \alpha \cap \beta$. Ekkor $(a, b) \in \alpha$ miatt van olyan $1 \leqslant i \leqslant r$, hogy $a, b \in C_i$. Így $(a, b) \in \beta$ miatt $a = b$. Azaz $\alpha \wedge \beta = \alpha \cap \beta = 0_a$.

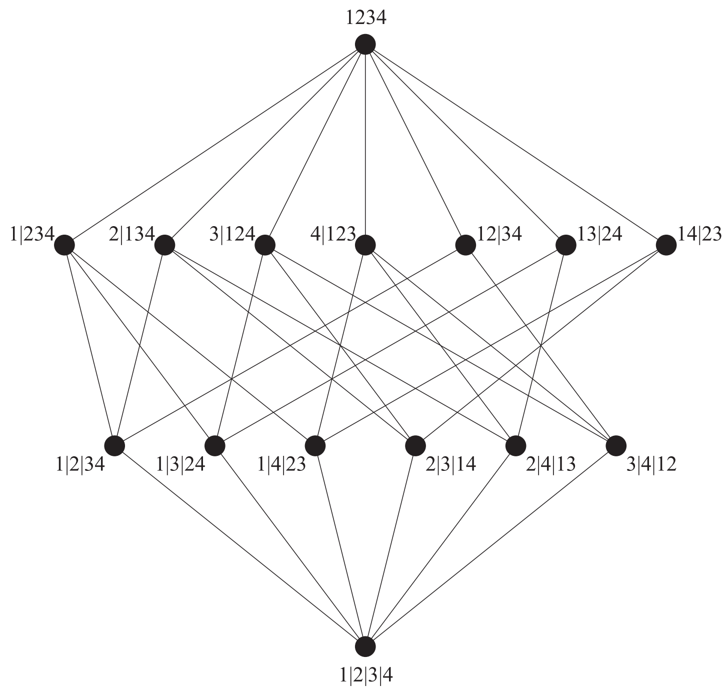
Legyen $c \in A \setminus \{c_1, \ldots, c_r\}$. Ekkor van olyan $i \in \{1, \ldots, r\}$, hogy $c \in C_i$. Így $c_1 \,\beta\, c_i \,\alpha\, c$ miatt

$$(c_1, c) \in \beta \circ \alpha \subseteq \alpha \vee \beta.$$

Azaz $(c_1, c) \in \alpha \vee \beta$ teljesül tetszőleges $c \in A$-ra. Ez pedig azt jelenti, hogy $\alpha \vee \beta = 1_A$. Vagyis, β komplementuma α-nak. A konstrukcióból az is látszik, hogy pontosan akkor egyértelmű a komplementum, ha $\alpha \in \{0_A, 1_A\}$.



1. ábra: Az $(\mathrm{Eq}(\{1, 2, 3\}); \subseteq)$ hálószerűen rendezett halmaz Hasse-diagramja.



2. ábra: Az $(\mathrm{Eq}(\{1,2,3,4\});\subseteq)$ hálószerűen rendzett halmaz Hasse-diagramja.

Részalgebrák

8. Feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és $\mathbf{A} = (A; *)$, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

(a)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(b)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	c
b	a	b	c	c
c	d	d	b	b
d	c	d	b	a

(c)

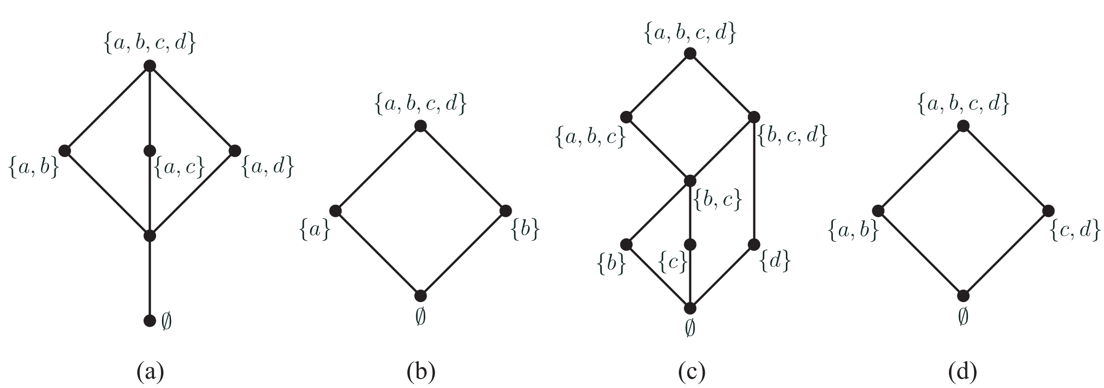
$*$	a	b	c	d
a	b	c	c	c
b	b	b	b	b
c	c	b	c	c
d	d	c	b	d

(d)

$*$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	b	a	d	b
c	a	c	d	c
d	c	b	c	c

Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ algebra részalgebráinak $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ halmazát, majd rajzoljuk fel a $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A});\subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.

MEGOLDÁS. (a) Az $\mathbf{A}$ algebra részalgebrái a következők: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{a,b,c,d\}$.
(b) Az $\mathbf{A}$ algebra részalgebrái a következők: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ $\{a,b,c,d\}$.
(c) Az $\mathbf{A}$ algebra részalgebrái a következők: $\emptyset$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$, $\{b,c,d\}$ $\{a,b,c,d\}$.
(d) Az $\mathbf{A}$ algebra részalgebrái a következők: $\emptyset$, $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ $\{a,b,c,d\}$.
A Hasse-diagramok pedig a következők:



3. ábra.

Az $\mathbf{A}$ algebra **monounér**, ha egyetlen egyváltozós alapművelete van. Ha $A = \{1, 2, \dots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

jelöli az $A \to A,\ k \mapsto a_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ unér műveletet.

---

9. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = (A; f)$ monounér algebra részalgebráinak $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ halmazát.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

(f) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Rajzoljuk fel a $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A}); \subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ A feladatok megoldása során fel lehet használni azt az állítást, hogy ha B részalgebrája $\mathbf{A}$-nak és $a \in B$, akkor $\langle a \rangle \subseteq B$ is teljesül.

A részalgebrák a következő:

(a)
$$\begin{array}{c} \emptyset, \\ \{4,5\}, \\ \{3,4,5\}, \\ \{2,3,4,5\}, \\ \{1,2,3,4,5\}; \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c} \emptyset, \\ \{4,5\}, \\ \{1,4,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}, \\ \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \\ \{1,2,3,4,5\}; \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{c} \emptyset, \\ \{4,5\}, \\ \{3,4,5\}, \\ \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \\ \{1,2,3,4,5\}; \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{c} \emptyset, \\ \{4,5\}, \\ \{1,4,5\}, \{3,4,5\}, \\ \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \\ \{1,2,3,4,5\}; \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{c} \emptyset, \\ \{5,6,7\}, \\ \{3,5,6,7\}, \{4,5,6,7\}, \\ \{1,4,5,6,7\}, \{2,4,5,6,7\}, \{3,4,5,6,7\}, \\ \{1,2,4,5,6,7\}, \{1,3,4,5,6,7\}, \{2,3,4,5,6,7\}, \\ \{1,2,3,4,5,6,7\}; \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{cc} \emptyset, & \{5\}, \\ \{2,3\}, & \{2,3,5\}, \\ \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, & \{1,2,3,5\}, \{2,3,4,5\}, \\ \{1,2,3,4\}, & \{1,2,3,4,5\}. \end{array}$$