3. Feladatsor

Matematikai Struktúrák (MMN103G)

2009/2010. őszi félév

Hálók

1. Feladat. Rajzoljuk fel az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

(a) $(\{0,1,2,3,4\};\leqslant)$, $(\{0,1,2,3,4\};\geqslant)$;

(b) $(P(\{1,2,3\});\subseteq)$, $(P(\{1,2,3\});\supseteq)$;

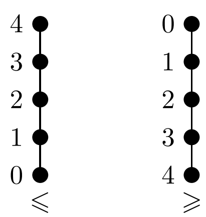
(c) $(\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\};\subseteq)$;

(d) $(\{d\in\mathbb{N}\mid d \text{ osztója 60-nak}\};\mid)$;

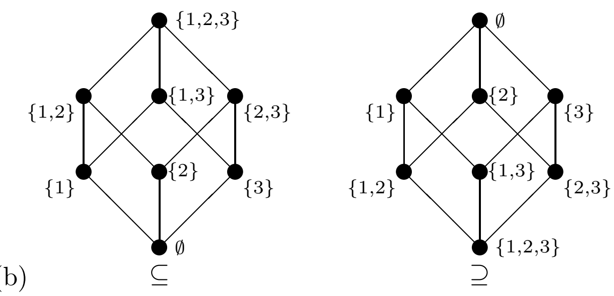
(e) $(\{d\in\mathbb{N}\mid d \text{ osztója 36-nak és } 1<d<36\};\mid)$.

Melyek hálók a fentiek közül?

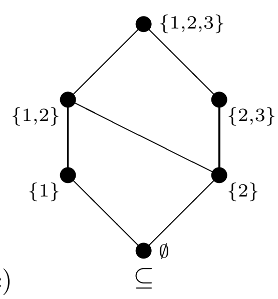
$\boxed{\text{Megoldás.}}$ A Hasse-diagramok rendre a következők:



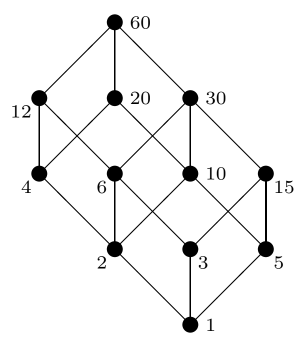
(a)



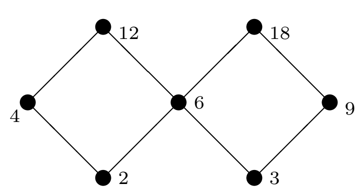
(b)



(c)



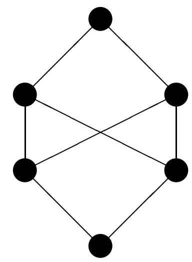
(d)



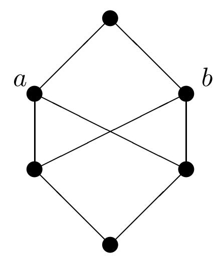
(e)

Az (a)–(d) esetekben a részbenrendezett halmazok hálók, az (e) esetben pedig nem.

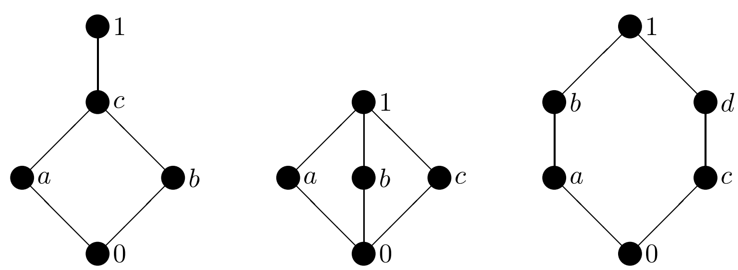
2. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi részbenrendezett halmaz nem háló.



$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az a és b elemeknek nincs legnagyobb felső korlátja:



3. Feladat. Írjuk fel az alábbi hálószerűen rendezett halmazok esetén a hozzájuk tartozó metszet ($\wedge$) és egyesítés ($\vee$) műveletek műveletttáblázatait.



$\mathbf{L}_1$ $\mathbf{M}_3$ $\mathbf{L}_2$

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az $\mathbf{L}_1$ háló műveletttáblázatai:

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a
b	0	0	b	b	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	c	c	1
b	b	c	b	c	1
c	c	c	c	c	1
1	1	1	1	1	1

Az $\mathbf{M}_3$ háló műveletttáblázatai:

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	a
b	0	0	b	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	a	b	c	1

$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	1	1	1
b	b	1	b	1	1
c	c	1	1	c	1
1	1	1	1	1	1

Az $\mathbf{L}_2$ háló műveletttáblázatai:

$\wedge$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	1
a	0	a	a	0	0	a
b	0	a	b	0	0	b
c	0	0	0	c	c	c
d	0	0	0	c	d	d
1	0	a	b	c	d	1

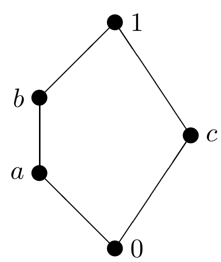
$\wedge$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	1
a	a	a	b	1	1	1
b	b	b	b	1	1	1
c	c	1	1	c	d	1
d	d	1	1	d	d	1
1	1	1	1	1	1	1

4. Feladat. Legyen $\mathbf{N}_5 = (\{0, a, b, c, 1\};\ \wedge\ ,\ \vee\ )$ háló, ahol a $\wedge$ művelet műveletttáblázata a következő:

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	0	a
b	0	a	b	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	a	b	c	1

Rajzoljuk fel az $\mathbf{N}_5$ háló Hasse-diagramját és írjuk fel a $\vee$ művelet műveletttáblázatát.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az $\mathbf{N}_5$ háló Hasse-diagramja:



$\mathbf{N}_5$

Az $\vee$ művelet műveletttáblázata:

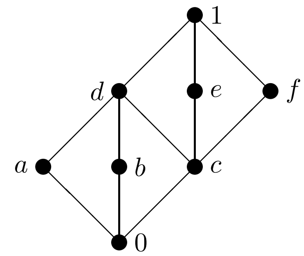
$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	a	b	1	1
b	b	b	b	1	1
c	c	1	1	c	1
1	1	1	1	1	1

5. Feladat. Legyen $\mathbf{M}_{3,3} = (\{0, a, b, c, d, e, f, 1\};\ \wedge\ ,\ \vee\ )$ háló, ahol a $\vee$ művelet műveletttáblázata a következő:

$\vee$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	a	b	c	d	e	f	1
a	a	a	d	d	d	1	1	1
b	b	d	b	d	d	1	1	1
c	c	d	d	c	d	e	f	1
d	d	d	d	d	d	1	1	1
e	e	1	1	e	1	e	1	1
f	f	1	1	f	1	1	f	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Rajzoljuk fel az $\mathbf{M}_{3,3}$ háló Hasse-diagramját és írjuk fel a $\wedge$ művelet műveletttáblázatát.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az $\mathbf{M}_{3,3}$ háló Hasse-diagramja:

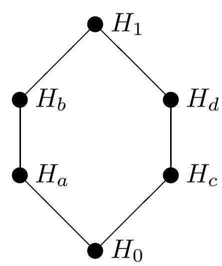


Az $\vee$ művelet művelettáblázata:

$\wedge$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	0	0	0	a
b	0	0	b	0	b	0	0	b
c	0	0	0	c	c	c	c	c
d	0	a	b	c	d	c	c	d
e	0	0	0	c	c	e	c	e
f	0	0	0	c	c	c	f	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

6. Feladat. Döntsük el, hogy van-e olyan A halmaz és $H \subseteq P(A)$, amelyre a $(H; \cap, \cup)$ Hasse-diagramja megegyezik az $\mathbf{L}$ háló Hasse-diagramjával, ahol $\mathbf{L} \in \{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_{3,3}, \mathbf{N}_5\}$ (ld.: 3–5. Feladatok).

$\boxed{\text{MEGOLDÁS.}}$ Csak az $\mathbf{L}_1$ halmaz esetében vannak megfelelő A és H halmazok, pl.: $A = \{0, 1, 2\}$ és $H = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}$. Tegyük fel, hogy vannak olyan A és $H = \{H_0, H_a, H_b, H_c, H_d, H_1\} \subseteq P(A)$ halmazok, amelyekre $(H; \cap, \cup)$ Hasse-diagramja megegyezik az $\mathbf{L}_2$ háló Hasse-diagramjával:



Ekkor $H_0 \subsetneqq H_a \subsetneqq H_b$ és $H_0 \subsetneqq H_c \subsetneqq H_d$, és így vannak olyan $x \in H_1$ elem, hogy $x \in H_b \setminus H_a$ és $x \notin H_d$. Ebben az esetben $x \in H_b \cup H_d$, de $x \notin H_a \cup H_c$. Ellentmondást kapunk.