# 2. Feladatsor

**Ekvivalenciarelációk**

**1. Feladat.** Legyenek $A$ és $B$ tetszőleges halmazok, valamint $f\colon A \to B$ tetszőleges leképezés. Mutassuk meg, hogy a

$$\ker(\varphi) = \{(a,b) \in A \times A \mid \varphi(a) = \varphi(b)\} \subseteq A \times A$$

reláció ekvivalenciareláció.

**2. Feladat.** Mutassuk meg, hogy a $\varphi\colon A \to B$ leképezés pontosan akkor injektív, ha $\ker(\varphi) = 0_A$.

---

Legyen $\varphi \subseteq A \times B$ tetszőleges reláció. Az $\varphi$ reláció **inverzének** nevezzük, és $\varphi^{-1}$-gyel jelöljük, a

$$\{(b,a) \mid (a,b) \in \alpha\} \subseteq B \times A$$

relációt.

---

**3. Feladat.** Legyen $\varphi$ tetszőleges $A$-ból $B$-be menő leképezés. Mutassuk meg a következőket:

(a) $\varphi^{-1} \subseteq B \times A$ pontosan akkor leképezés, ha $\varphi$ bijektív;

(b) $A^2 \supseteq \varphi \circ \varphi^{-1} = \ker(\varphi)$;

(c) $B^2 \supseteq \varphi^{-1} \circ \varphi = \{(b,b) \mid b \in \mathrm{Im}(\varphi)\}$.

**4. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az $\alpha \subseteq A \times A$ reláció pontosan akkor ekvivalenciareláció, ha $0_A \subseteq \alpha$, $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ és $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.

---

Tetszőleges $A$ halmaz esetén $\mathrm{Eq}(A)$-val jelöljük az $A$ halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk halmazát.

---

**5. Feladat.** Legyenek $A$ halmaz és $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$. Igazoljuk, hogy $\alpha \cup \beta$ reflexív és szimmetrikus, de nem feltétlenül tranzitív.

---

Legyen $\gamma$ tetszőleges reláció az $A$ halmazon. A $\gamma$ reláció **tranzitív lezártjának** nevezzük a

$$\gamma^* = \{(a,b) \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\exists z_1, \dots, z_n \in A)\ a\gamma z_1 \gamma z_2 \dots z_{n-1}\gamma z_n \gamma b\}$$

relációt. Ha $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$, akkor az $(\alpha \cup \beta)^*$ relációt $\alpha \vee \beta$-val jelöljük.

---

**6. Feladat.** Legyenek $A$ halmaz és $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$. Igazoljuk, hogy $\alpha \cup \beta$ reflexív és szimmetrikus, de nem feltétlenül tranzitív.

**7. Feladat.** Legyenek $A$ halmaz és $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha \vee \beta \in \mathrm{Eq}(A)$, valamint $\alpha \vee \beta = \alpha \cup \alpha \circ \beta \cup \alpha \circ \beta \circ \alpha \cup \cdots$.

---

Legyen $\alpha$ ekvivalenciareláció az $A$ halmazon. Ekkor $A/\alpha$-val jelöljük az $\alpha$-hoz tartozó ekvivalenciaosztályok halmazát, azaz

$$A/\alpha = \{a\alpha^\bullet \mid a \in A\},$$

ahol $a\alpha^\bullet = \{b \in A \mid a\alpha b\}$ — az $a$ elemet tartalmazó ekvivalenciaosztály. Az $A/\alpha$ halmaz az $A$ halmaz $\alpha$ szerinti **faktorhalmaza**.

---

**8. Feladat.** Tekintsük az $A = \{\text{alma}, \text{eper}, \text{málna}, \text{körte}, \text{citrom}\}$ halmazon az $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációkat:

$$x\,\alpha\,y \iff x \text{ és } y \text{ ugyanannyi betűből áll;}$$
$$x\,\beta\,y \iff x \text{ és } y \text{ színe megegyezik.}$$

Határozzuk meg az $A/(\alpha \cap \beta)$ és $A/(\alpha \vee \beta)$ faktorhalmazokat.

**9. Feladat.** Tekintsük az alábbi $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezéseket:

$$\varphi(x) = \lfloor x \rfloor\,;$$
$$\psi(x) = \mathrm{sgn}(x).$$

Határozzuk meg az $\mathbb{R}/(\ker(\varphi) \cap \ker(\psi))$ és $\mathbb{R}/(\ker(\varphi) \vee \ker(\psi))$ faktorhalmazokat.

**10. Feladat.** Legyen $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Határozzuk meg az $A/(\alpha \cap \beta)$ és $A/(\alpha \vee \beta)$ faktorhalmazokat, ha tudjuk, hogy

$$A/\alpha = \{\{1,2,3\},\{4\},\{5,7\},\{6\},\{8,9,10\}\},$$
$$A/\beta = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6,7\},\{8,9\},\{10\}\}.$$

Határozzuk meg az $\alpha \circ \beta$ relációt is.

**11. Feladat.** Legyen $A = \mathbb{R}$, $\tau \colon A \to A$, $x \mapsto |x|$. Határozzuk meg az $A/(\ker(\varphi) \cap \ker(\tau))$, $A/(\ker(\psi) \cap \ker(\tau))$ és $\mathbb{R}/(\ker(\varphi) \vee \ker(\tau))$, $\mathbb{R}/(\ker(\psi) \vee \ker(\tau))$ faktorhalmazokat, ahol $\varphi$ és $\psi$ a 9. Feladatban definiált leképezések.