2. Feladatsor

Ekvivalenciarelációk

1. Feladat. Legyenek A és B tetszőleges halmazok, valamint $f\colon A \to B$ tetszőleges leképezés. Mutassuk meg, hogy a

$$\ker(\varphi) = \{(a,b) \in A \times A \mid \varphi(a) = \varphi(b)\} \subseteq A \times A$$

reláció ekvivalenciareláció.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Reflexivitás: a $\ker(\varphi)$ reláció reflexív, mert tetszőleges $a \in A$ esetén $\varphi(a) = \varphi(a)$ teljesül, azaz $(a,a) \in \ker(\varphi)$.
Szimmetira: tegyük fel, hogy $(a,b) \in \ker(\varphi)$, ekkor

$$(a,b) \in \ker(\varphi) \iff \varphi(a) = \varphi(b) \iff \varphi(b) = \varphi(a) \iff (b,a) \in \ker(\varphi)\,,$$

azaz $\ker(\varphi)$ szimmetrikus.
Tranzitivitás: tegyük fel, hogy $(a,b),(b,c) \in \ker(\varphi)$, ekkor

$$\begin{aligned}(a,b),(b,c) \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(a) = \varphi(b),\ \varphi(b) = \varphi(c)\\ &\implies \varphi(a) = \varphi(c)\\ &\iff (a,c) \in \ker(\varphi)\,,\end{aligned}$$

azaz $\ker(\varphi)$ tranzitív. Ezzel igazoltuk, hogy $\ker(\varphi)$ ekvivalenciareláció.

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $\varphi\colon A \to B$ leképezés pontosan akkor injektív, ha $\ker(\varphi) = 0_A$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Tegyük fel, hogy $\ker(\varphi) = 0_A$. Ha az $a,b \in A$ elemekre $\varphi(a) = \varphi(b)$ teljesül, ekkor

$$\varphi(a) = \varphi(b) \iff (a,b) \in \ker(\varphi) = 0_A \iff a = b,$$

azaz φ injektív.

Tegyük fel, hogy φ injektív. Ekkor bármely $a,b \in A$-ra, ha $a \neq b$, akkor $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, azaz $(a,b) \notin \ker(\varphi)$. Így $\ker(\varphi) = 0_A$.

Legyen $\varphi \subseteq A \times B$ tetszőleges reláció. Az φ reláció **inverzének** nevezzük, és φ^{-1}-gyel jelöljük, a

$$\{(b,a) \mid (a,b) \in \alpha\} \subseteq B \times A$$

relációt.

---

3. Feladat. Legyen φ tetszőleges A-ból B-be menő leképezés. Mutassuk meg a következőket:

(a) $\varphi^{-1} \subseteq B \times A$ pontosan akkor leképezés, ha φ bijektív;

(b) $A^2 \supseteq \varphi \circ \varphi^{-1} = \ker(\varphi)$;

(c) $B^2 \supseteq \varphi^{-1} \circ \varphi = \{(b,b) \mid b \in \mathrm{Im}(\varphi)\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) Tegyük fel, hogy φ^{-1} leképezés. Legyen a tetszőleges A-beli elem. Ekkor van olyan $b \in B$, amelyre $b = \varphi^{-1}(a)$ teljesül. Így

$$b = \varphi^{-1}(a) \iff (b,a) \in \varphi^{-1} \iff (a,b) \in \varphi,$$

azaz $b \in B$ őse a-nak. Ezzel igazoltuk, hogy φ szürjektív. Legyenek a és a' olyan A-beli elemek, amelyekre $\varphi(a) = \varphi(a')$ teljesül. Ekkor $(a,\varphi(a)),(a',\varphi(a')) \in \varphi$ miatt $(\varphi(a),a),(\varphi(a'),a') \in \varphi^{-1}$. Mivel

$\varphi(a) = \varphi(a')$ és φ^{-1} leképezés, ezért $a = a'$. Azaz φ injektív. Ezzel igazoltuk, hogy a φ leképezés bijektív.

Tegyük fel, hogy φ bijektív. Ha $b \in B$, akkor van olyan $a \in A$, amelyre $(a, b) \in \varphi$ teljesül, mivel φ szürjektív. A φ leképezés injektivitás pedig biztosítja, hogy ez a b elem egyértelmű. Így φ^{-1} leképezés.

(b) Legyenek a és a' tetszőleges A-beli elemek. Ekkor

$$\begin{aligned}(a, a') \in \varphi \circ \varphi^{-1} &\iff \text{van olyan } b \in B, \text{ hogy } (a, b) \in \varphi \text{ és } (b, a') \in \varphi^{-1} \\ &\iff \text{van olyan } b \in B, \text{ hogy } (a, b), (a', b) \in \varphi \\ &\iff \text{van olyan } b \in B, \text{ hogy } \varphi(a) = b = \varphi(a') \\ &\iff \varphi(a) = \varphi(a') \\ &\iff (a, a') \in \ker(\varphi),\end{aligned}$$

azaz $\varphi \circ \varphi^{-1} = \ker(\varphi)$.

(c) Legyenek b és b' tetszőleges B-beli elemek. Ekkor

$$\begin{aligned}(b, b') \in \varphi^{-1} \circ \varphi &\iff \text{van olyan } a \in A, \text{ hogy } (b, a) \in \varphi^{-1} \text{ és } (a, b') \in \varphi \\ &\iff \text{van olyan } a \in A, \text{ hogy } (a, b), (a, b') \in \varphi \\ &\iff b = b' \in \mathrm{Im}(\varphi),\end{aligned}$$

azaz $\varphi^{-1} \circ \varphi = \{(b, b) \mid b \in \mathrm{Im}(\varphi)\}$.

4. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $\alpha \subseteq A \times A$ reláció pontosan akkor ekvivalenciareláció, ha $0_A \subseteq \alpha$, $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ és $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.

MEGOLDÁS. Legyen $\xi \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. Ekkor

$$\begin{aligned}\xi \text{ reflexív} &\iff \text{minden } a \in A\text{-ra } (a, a) \in \xi \\ &\iff 0_A \subseteq \xi;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi \text{ szimmetrikus} &\iff \text{minden } a, b \in A\text{-ra, ha } (a, b) \in \xi, \text{ akkor } (b, a) \in \xi \\ &\iff \text{minden } a, b \in A\text{-ra, ha } (a, b) \in \xi, \text{ akkor } (a, b) \in \xi^{-1} \\ &\iff \xi \subseteq \xi^{-1};\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy ξ tranzitív. Ekkor tetszőleges $(a, c) \in A \times A$-ra

$$\begin{aligned}(a, c) \in \xi \circ \xi &\implies \text{van olyan } b \in A, \text{ amelyre } (a, b), (b, c) \in \xi \\ &\overset{\xi \text{ tranz.}}{\implies} (a, c) \in \xi,\end{aligned}$$

azaz $\xi \circ \xi \subseteq \xi$.

Tegyük fel, hogy ξ-re $\xi \circ \xi \subseteq \xi$ teljesül. Legyen $(a, b), (b, c) \in \xi$ $(a, b, c \in A)$. Ekkor $(a, c) \in \xi \circ \xi$, és így a feltétel miatt $(a, c) \in \xi$ is teljesül. Azaz ξ tranzitív.

Mindezek után az eredeti állítás már egyszerűen adódik:

$$\begin{aligned}\alpha \text{ ekvivalenciareláció} &\iff \alpha \text{ reflexív, szimmetrikus és tranzitív;} \\ &\iff 0_A \subseteq \alpha,\ \alpha \subseteq \alpha^{-1} \text{ és } \alpha \circ \alpha \subseteq \alpha.\end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Tetszőleges A halmaz esetén $\mathrm{Eq}(A)$-val jelöljük az A halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk halmazát.

---

5. Feladat. Legyenek A halmaz és $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$. Igazoljuk, hogy $\alpha \cup \beta$ reflexív és szimmetrikus, de nem feltétlenül tranzitív.

MEGOLDÁS. Mivel α reflexívek, ezért $0_A \subseteq \alpha \subseteq \alpha \cup \beta$, azaz $\alpha \cup \beta$ is reflexív. Mivel α és β szimmetrikus, ezért $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ és $\beta \subseteq \beta^{-1}$. Így $\alpha \cup \beta \subseteq \alpha^{-1} \cup \beta^{-1} = (\alpha \cup \beta)^{-1}$, azaz $\alpha \cup \beta$ is szimmetrikus.

Tekintsük az $A = \{0,1,2\}$ halmazon az $\alpha = 0_A \cup \{(0,1),(1,0\}$ és $\beta = 0_A \cup \{(1,2),(2,1\}$ ekvivalenciarelációkat. Ekkor az

$$\alpha \cup \beta = 0_A \cup \{(0,1),(1,0),(1,2),(2,1)\}$$

reláció nem tranzitív: $(0,1),(1,2) \in \alpha \cup \beta$, de $(0,2) \notin \alpha \cup \beta$.

Legyen γ tetszőleges reláció az A halmazon. A γ reláció **tranzitív lezártjának** nevezzük a

$$\gamma^* = \gamma \cup \{(a,b) \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\exists z_1,\dots,z_n \in A)\ a\gamma z_1 \gamma z_2 \dots z_{n-1}\gamma z_n \gamma b\}$$

relációt.[1] Ha $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$, akkor az $(\alpha \cup \beta)^*$ relációt $\alpha \vee \beta$-val jelöljük.

---

6. Feladat. Legyenek A halmaz és $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}(A)$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha \vee \beta \in \mathrm{Eq}(A)$, valamint $\alpha \vee \beta = \alpha \cup \alpha \circ \beta \cup \alpha \circ \beta \circ \alpha \cup \cdots$.

$\boxed{\text{MEGOLDÁS.}}$ Az $\alpha \vee \beta = (\alpha \cup \beta)^*$ reláció nyilván tranzitív.

Tegyük fel, hogy $(a,b) \in (\alpha \cup \beta)^*$. Ekkor vagy $(a,b) \in \alpha \cup \beta$ vagy van olyan $n \in \mathbb{N}$, $z_1,\dots,z_n \in A$, amelyekre $a(\alpha\cup\beta)z_1(\alpha\cup\beta)z_2 \dots z_{n-1}(\alpha\cup\beta)z_n(\alpha\cup\beta)b$ teljesül. Mivel $\alpha \cup \beta$ szimmetrikus, ezért mindkét esetben azt kapjuk, hogy $(b,a) \in (\alpha \cup \beta)^*$, azaz $\alpha \vee \beta$ szimmetrikus.

Mivel

$$0_A \subseteq \alpha \cup \beta \subseteq (\alpha \cup \beta)^* = \alpha \vee \beta,$$

ezért $\alpha \vee \beta$ reflexív. Ezzel igazoltuk, hogy $\alpha \vee \beta \in \mathrm{Eq}(A)$.

Az $\alpha \vee \beta = \alpha \cup \alpha \circ \beta \cup \alpha \circ \beta \circ \alpha \cup \cdots$ egyenlőség igazolásához jegyezzük meg, hogy az α és β relációk reflexivitása miatt

$$\alpha \subseteq \alpha \circ \beta \subseteq \alpha \circ \beta \circ \alpha \subseteq \cdots.$$

Legyen $\Gamma = \alpha \cup \alpha \circ \beta \cup \alpha \circ \beta \circ \alpha \cup \cdots$. Legyen $(a,b),(b,c) \in \Gamma$. Ekkor van olyan $k, l \in \mathbb{N}_0$, amelyre

$$(a,b) \in \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \cdots \circ \beta \circ \alpha}_{2k+1 \text{ tényező}}$$

$$(b,c) \in \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \cdots \circ \beta \circ \alpha}_{2l+1 \text{ tényező}}$$

teljesül, ekkor

$$\begin{aligned}(a,c) &\in \underbrace{(\alpha \circ \beta \circ \cdots \circ \beta \circ \alpha)}_{2k+1 \text{ tényező}} \circ \underbrace{(\alpha \circ \beta \circ \cdots \circ \beta \circ \alpha)}_{2l+1 \text{ tényező}} \\ &= \underbrace{(\alpha \circ \beta \circ \cdots \circ \beta)}_{2k \text{ tényező}} \circ \underbrace{(\alpha \circ \alpha)}_{\subseteq \alpha} \circ \underbrace{(\beta \circ \cdots \circ \beta \circ \alpha)}_{2l \text{ tényező}} \\ &\subseteq \underbrace{(\alpha \circ \beta \circ \cdots \circ \beta \circ \alpha)}_{2k+2l+1 \text{ tényező}} \\ &\subseteq \Gamma,\end{aligned}$$

azaz Γ tranzitív, és így $\alpha \vee \beta \subseteq \Gamma$.

Legyen (a,b) a Γ reláció tetszőleges eleme. Ekkor van olyan $k \in \mathbb{N}_0$, amelyre

$$(a,b) \in \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \cdots \circ \beta \circ \alpha}_{2k+1 \text{ tényező}}$$

---

[1] Tegyük fel, hogy Γ a γ relációt tartalmazó tranzitív reláció A-n. Ha $(a,b) \in \gamma^*$, akkor vagy $(a,b) \in \gamma \subseteq \Gamma$ vagy van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $z_1,\dots,z_n$, amelyekre $a\gamma z_1 \gamma z_2 \dots z_{n-1}\gamma z_n \gamma b$ teljesül, ekkor $a\Gamma z_1 \Gamma z_2 \dots z_{n-1}\Gamma z_n \Gamma b$, és így Γ tranzitivitása miatt $(a,b) \in \Gamma$. Azaz $\gamma^* \subseteq \Gamma$. Másrészt, ha $(a,b),(b,c) \in \gamma^*$, akkor vannak olyan k és l természetes számok, hogy $(a,b) \in \gamma^k$ és $(b,c) \in \gamma^l$. Így $(a,c) \in \gamma^{k+l} \subseteq \gamma^*$. Azaz γ^* tranzitív. Ez pedig azt jelenti, hogy γ^* a legszűkebb γ-t tartalamazó tranzitív reláció.

teljesül. Mivel $\alpha, \beta \subseteq \alpha \cup \beta$, ezért

$$\begin{aligned}(a,b) \in \underbrace{\alpha \circ \beta \circ \cdots \circ \beta \circ \alpha}_{2k+1 \text{ tényező}} \\ &\subseteq \underbrace{(\alpha \cup \beta) \circ (\alpha \cup \beta) \circ \cdots \circ (\alpha \cup \beta) \circ (\alpha \cup \beta)}_{2k+1 \text{ tényező}} \\ &\subseteq (\alpha \cup \beta)^* = \alpha \vee \beta,\end{aligned}$$

azaz $\Gamma \subseteq \alpha \vee \beta$. Ezzel igazoltuk, hogy $\alpha \vee \beta = \Gamma$.

Legyen α ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor A/α-val jelöljük az α-hoz tartozó ekvivalenciaosztályok halmazát, azaz

$$A/\alpha = \{a\alpha^{\bullet} \mid a \in A\},$$

ahol $a\alpha^{\bullet} = \{b \in A \mid a\alpha b\}$ — az a elemet tartalmazó ekvivalenciaosztály. Az A/α halmaz az A halmaz α szerinti **faktorhalmaza**.

---

7. Feladat. Tekintsük az $A = \{\text{alma}, \text{eper}, \text{málna}, \text{körte}, \text{citrom}\}$ halmazon az $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációkat:

$$\begin{aligned} x \,\alpha\, y &\iff x \text{ és } y \text{ ugyanannyi betűből áll;} \\ x \,\beta\, y &\iff x \text{ és } y \text{ színe megegyezik.}\end{aligned}$$

Határozzuk meg az $A/(\alpha \cap \beta)$ és $A/(\alpha \vee \beta)$ faktorhalmazokat.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Ekkor

$$\begin{aligned} A/\alpha &= \{\{\text{alma}, \text{eper}\}, \{\text{citrom}\}, \{\text{málna}, \text{körte}\}\}, \\ A/\beta &= \{\{\text{alma}, \text{eper}, \text{málna}\}, \{\text{citrom}\}, \{\text{körte}\}\}.\end{aligned}$$

Így $A/(\alpha \cap \beta) = \{\{\text{alma}, \text{eper}\}, \{\text{citrom}\}, \{\text{körte}\}, \{\text{málna}\}\}$. Mivel

$$\alpha \vee \beta = \alpha \circ \beta \circ \alpha = \{\text{alma}, \text{eper}, \text{körte}, \text{málna}\}^2 \cup \{(\text{citrom}, \text{citrom})\},$$

ezért $A/(\alpha \vee \beta) = \{\{\text{alma}, \text{eper}, \text{körte}, \text{málna}\}, \{\text{citrom}\}\}$.

8. Feladat. Tekintsük az alábbi $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezéseket:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lfloor x \rfloor; \\ \psi(x) &= \operatorname{sgn}(x).\end{aligned}$$

Határozzuk meg az $\mathbb{R}/(\ker(\varphi) \cap \ker(\psi))$ és $\mathbb{R}/(\ker(\varphi) \vee \ker(\psi))$ faktorhalmazokat.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Mivel

$$(a,b) \in \ker(\varphi) \cap \ker(\psi) \iff \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor,\ \operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b),$$

ezért

$$\mathbb{R}/(\ker(\varphi) \cap \ker(\psi)) = \{\ldots, [-2,-1), [-1,0), \{0\}, (0,1), [1,2), [2,3), \ldots\}.$$

Először határozzuk meg a $\ker(\varphi) \circ \ker(\psi)$ relációt:

$$(a,b) \in \ker(\varphi) \circ \ker(\psi) \iff (\exists c \in \mathbb{R})\ \lfloor a \rfloor = \lfloor c \rfloor, \text{ és } \operatorname{sgn}(c) = \operatorname{sgn}(b),$$

így

$$\ker(\varphi) \circ \ker(\psi) = (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-) \cup ([0,1) \times \mathbb{R}_0^+) \cup ([1,\infty) \times \mathbb{R}^+).$$

Végül határozzuk meg a $\vartheta = \ker(\varphi) \circ \ker(\psi) \circ \ker(\varphi)$ relációt:

$$(a,b) \in \vartheta \iff (\exists z_1, z_2 \in \mathbb{R})\ \lfloor a \rfloor = \lfloor z_1 \rfloor,\ \operatorname{sgn}(z_1) = \operatorname{sgn}(z_2), \text{ és } \lfloor z_2 \rfloor = \lfloor b \rfloor,$$

így
$$\vartheta = (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-) \cup (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+).$$
Azaz $\mathbb{R}/(\ker(\varphi) \vee \ker(\psi)) = \{\mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^+\}$.

9. Feladat. Legyen $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Határozzuk meg az $A/(\alpha \cap \beta)$ és $A/(\alpha \vee \beta)$ faktorhalmazokat, ha tudjuk, hogy

$$A/\alpha = \{\{1,2,3\},\{4\},\{5,7\},\{6\},\{8,9,10\}\},$$
$$A/\beta = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6,7\},\{8,9\},\{10\}\}.$$

Határozzuk meg az $\alpha \circ \beta$ relációt is.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Mivel $\alpha \cap \beta = 0_A \cup \{1,2\}^2 \cup \{8,9\}^2$, ezért

$$A/(\alpha \cap \beta) = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8,9\},\{10\}\}.$$

Az $\alpha \circ \beta$, illetve $\beta \circ \alpha$ szorzat a következő:

$$\alpha \circ \beta = \Big(\{1,2,3,4\}^2 \cup \{5,6,7\}^2 \cup \{8,9,10\}^2\Big) \setminus \{(4,1),(4,2),(6,5)\},$$
$$\beta \circ \alpha = \Big(\{1,2,3,4\}^2 \cup \{5,6,7\}^2 \cup \{8,9,10\}^2\Big) \setminus \{(1,4),(2,4),(5,6)\},$$

Továbbá
$$A/(\alpha \vee \beta) = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7\},\{8,9,10\}\}.$$

10. Feladat. Legyen $A = \mathbb{R}$, $\tau\colon A \to A,\ x \mapsto |x|$. Határozzuk meg az $A/(\ker(\varphi) \cap \ker(\tau))$, $A/(\ker(\psi) \cap \ker(\tau))$ és $A/(\ker(\varphi) \vee \ker(\tau))$, $A/(\ker(\psi) \vee \ker(\tau))$ faktorhalmazokat, ahol φ és ψ a 8. Feladatban definiált leképezések.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Legyen $\alpha = \ker(\varphi)$, $\beta = \ker(\psi)$ és $\gamma = \ker(\tau)$, valamint legyenek a és b tetszőleges valós számok. Ekkor

$$(a,b) \in \alpha \cap \gamma \iff \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor,\ |a| = |b| \qquad \iff a = b,$$
$$(a,b) \in \beta \cap \gamma \iff \operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b),\ |a| = |b| \iff a = b,$$

azaz $\mathbb{R}/(\alpha \cap \gamma) = \mathbb{R}/(\beta \cap \gamma) = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Vizsgáljuk meg az $\alpha \circ \gamma$ és $\beta \circ \gamma$ relációkat:

$$\begin{aligned}(a,b) \in \alpha \circ \gamma &\iff (\exists w \in \mathbb{R})(\lfloor a \rfloor = \lfloor w \rfloor,\ |w| = |b|)\\ &\iff [a] \leqslant b < [a] + 1 \text{ vagy } -[a] - 1 < b \leqslant -[a],\\ (a,b) \in \beta \circ \gamma &\iff (\exists w \in \mathbb{R})(\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(w),\ |w| = |b|)\\ &\iff a = b = 0 \text{ vagy } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Ebből annyi már kiderül, hogy $\beta \vee \gamma = \beta \circ \gamma$, így $\mathbb{R}/(\beta \vee \gamma) = \{\{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Legyen a tetszőleges egész szám. Ekkor
$$a\,\alpha\,(a + 1 - \varepsilon)\,\gamma\,(\varepsilon - a - 1)\,\alpha(-a - 1)\,\gamma\,(a + 1),$$
azaz $(a, a+1) \in \alpha \circ \gamma \circ \alpha \circ \gamma \subseteq \alpha \vee \gamma$. Az $\alpha \vee \gamma$ reláció szimmetriáját és tranzitivitását felhasználva azt kapjuk, hogy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \alpha \vee \gamma$. Így tetszőleges $r, s \in \mathbb{R}$-re

$$r\,\alpha\,\lfloor r \rfloor\ (\alpha \vee \gamma)\ \lfloor s \rfloor\ \alpha\, s$$

következtében $(r,s) \in \alpha \vee \gamma$. Ez pedig azt mutatja, hogy $\alpha \vee \gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, és így $\mathbb{R}/(\alpha \vee \gamma) = \{\mathbb{R}\}$.