1. Feladatsor

Emlékeztető

1. Feladat. Döntsük el, hogy az $\alpha \subseteq A \times B$ megfeleltetés leképezés-e.

(a) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, \sqrt{5}, 3\}$, $\alpha = \big\{(a, b) \in A \times B \mid a^2 + b^2 = 1\big\}$;

(b) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $\alpha = \{(a, b) \in A \times B \mid a - b = -2\}$;

(♣) $A = B = \mathbb{R}$, $\alpha = \big\{(a, b) \in A \times B \mid b \neq 0,\ b^2 - ab + 1 = 0\big\} \cup \{(0, 0)\}$.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) Nem leképezés, mivel $(0, 1), (0, -1) \in \alpha$;
(b) Az α megfeleltetés leképezés: $\alpha\colon A \to B,\ a \mapsto a + 2$.
(♣) Nem leképezés, mivel $\left(3, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \in \alpha$.

2. Feladat. Milyen tulajdonságokkal bír az ω leképezés?

(a) $\omega\colon \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \omega(a) = a + \left\lfloor \dfrac{a}{3} \right\rfloor$;

(b) $\omega\colon \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\},\ \omega(a) = a - \left\lfloor \dfrac{a}{3} \right\rfloor$;

(c) $\omega\colon \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\},\ \omega(a) = a + \left\lfloor \dfrac{a}{5} \right\rfloor$;

(♣) $\omega\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ \omega(a) = \begin{cases} -a/2, & \text{ha } a \text{ páros,} \\ (a-1)/2, & \text{ha } a \text{ páratlan.} \end{cases}$

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) Az ω leképezés injektív, de nem szürjektív;
(b) Az ω leképezés szürjektív, de nem injektív;
(c) Az ω leképezés bijektív ($\omega = \mathrm{id}_A$);
(♣) Az ω leképezés bijektív ($b \in \mathbb{Z}$ őse $2b$, ha $b < 0$, illetve $2b + 1$, ha $b \geqslant 0$.)

3. Feladat. Legyenek α és β az alábbi leképezések:

$$\alpha\colon \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\},\ x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor,$$
$$\beta\colon \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\},\ x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor.$$

Határozzuk meg mindazon $\gamma\colon \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ leképezések számát, amelyekre az alábbi diagrammok kommutatívak:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \bullet \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$
$(\beta = \alpha \circ \gamma)$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$
$(\alpha = \beta \circ \gamma)$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dashed, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta"'] & \bullet \arrow[d, "\alpha"] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$
$(\beta = \gamma \circ \alpha)$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dashed, "\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, "\beta"] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$
$(\alpha = \gamma \circ \beta)$

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) Tegyük fel, hogy $\beta = \alpha \circ \gamma$. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(0) = \gamma(\alpha(0)) = \gamma(0), \\ 0 &= \beta(1) = \gamma(\alpha(1)) = \gamma(0), \\ 1 &= \beta(2) = \gamma(\alpha(2)) = \gamma(1), \\ 1 &= \beta(3) = \gamma(\alpha(3)) = \gamma(1), \\ 1 &= \beta(4) = \gamma(\alpha(4)) = \gamma(2), \end{aligned}$$

azaz minden olyan $\gamma\colon \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$ leképezés jó lesz, amelyre $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = \gamma(2) = 1$ teljesül. Ezen leképezések száma 25, mivel $\gamma(3)$ és $\gamma(4)$ is a $\{0,1,2,3,4\}$ halmaz tetszőleges eleme lehet.
(b) Tegyük fel, hogy $\alpha = \beta \circ \gamma$. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(0) = \gamma(\beta(0)) = \gamma(0), \\ 0 &= \alpha(1) = \gamma(\beta(1)) = \gamma(0), \\ 1 &= \alpha(2) = \gamma(\beta(2)) = \gamma(1), \\ 1 &= \alpha(3) = \gamma(\beta(3)) = \gamma(1), \\ 2 &= \alpha(4) = \gamma(\beta(4)) = \gamma(1). \end{aligned}$$

Ilyen γ leképezés nincsen.
(c) Tegyük fel, hogy $\beta = \gamma \circ \alpha$. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(0) = \alpha(\gamma(0)) \iff \gamma(0) \in \{0,1\}, \\ 0 &= \beta(1) = \alpha(\gamma(1)) \iff \gamma(1) \in \{2,3\}, \\ 1 &= \beta(2) = \alpha(\gamma(2)) \iff \gamma(2) \in \{2,3\}, \\ 1 &= \beta(3) = \alpha(\gamma(3)) \iff \gamma(3) \in \{2,3\}, \\ 1 &= \beta(4) = \alpha(\gamma(4)) \iff \gamma(4) \in \{2,3\}. \end{aligned}$$

Ezen leképezések száma $2^5 = 32$, mivel minden olyan leképezés jó lesz, amelyre $\gamma(0) \in \{0,1\}$ és $\gamma(1), \gamma(2), \gamma(3), \gamma(4) \in \{2,3\}$ teljesül.
(d) Tegyük fel, hogy $\alpha = \gamma \circ \beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(0) = \beta(\gamma(0)) \iff \gamma(0) \in \{0,1\}, \\ 0 &= \alpha(1) = \beta(\gamma(1)) \iff \gamma(1) \in \{0,1\}, \\ 1 &= \alpha(2) = \beta(\gamma(2)) \iff \gamma(2) \in \{2,3,4\}, \\ 1 &= \alpha(3) = \beta(\gamma(3)) \iff \gamma(3) \in \{2,3,4\}, \\ 2 &= \alpha(4) = \beta(\gamma(2)) \iff \gamma(4) \in \emptyset. \end{aligned}$$

Ilyen γ leképezés nincsen.

4. Feladat. Legyen $A = \{\text{alma}, \text{eper}, \text{málna}, \text{körte}, \text{citrom}\}$. Döntsük el, hogy a $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk mely tulajdonságokkal bírnak, ahol

$$\begin{aligned} x\,\alpha\,y &\iff x \text{ és } y \text{ ugyanannyi betűből áll;} \\ x\,\beta\,y &\iff x \text{ és } y \text{ színe megegyezik.} \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $\alpha \circ \beta$, illetve $\beta \circ \alpha$ relációszorzatokat.*

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az α és β relációk ekvivalenciarelációk, azaz reflexívek, szimmetrikusak és tranzitívak.

Az α és β relációk szorzata:

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta &= \{(x,z) \mid \text{van olyan } y \in A, \text{ hogy } x\,\alpha\,y \text{ és } y\,\beta\,z\} \\ &= 0_A \cup \{\text{alma}, \text{eper}, \text{málna}\}^2 \cup \{\text{körte}\} \times \{\text{alma}, \text{eper}, \text{málna}\}, \\ \beta \circ \alpha &= \{(x,z) \mid \text{van olyan } y \in A, \text{ hogy } x\,\beta\,y \text{ és } y\,\alpha\,z\} \\ &= 0_A \cup \{\text{alma}, \text{eper}, \text{málna}\}^2 \cup \{\text{alma}, \text{eper}, \text{málna}\} \times \{\text{körte}\}. \end{aligned}$$

*A feladat megoldása során feltételezzük, hogy a gyümölcsök érettek, valamint azt is, hogy az alma piros.

Azaz $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

5. Feladat. Döntsük el, hogy a $\alpha, \beta \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relációk mely tulajdonságokkal bírnak, ahol

$$\begin{aligned} x\,\alpha\,y &\Longleftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor\,; \\ x\,\beta\,y &\Longleftrightarrow \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y). \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $\alpha \circ \beta$, illetve $\beta \circ \alpha$ relációszorzatokat.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Mindkét reláció ekvivalenciareláció. Legyenek a és b tetszőleges valós számok. Ekkor

$$\begin{aligned} (a,b) \in \alpha \circ \beta &\Longleftrightarrow (\exists c \in \mathbb{R})(\lfloor a \rfloor = \lfloor c \rfloor\,,\ \operatorname{sgn}(c) = \operatorname{sgn}(b)), \\ &\Longleftrightarrow (a,b) \in (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-) \cup (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup ([0,1) \times \{0\}), \\ (a,b) \in \beta \circ \alpha &\Longleftrightarrow (\exists c \in \mathbb{R})(\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(c),\ \lfloor c \rfloor = \lfloor b \rfloor), \\ &\Longleftrightarrow (a,b) \in (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-) \cup (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\{0\} \times [0,1)). \end{aligned}$$