Magasabb fokú egyenletek és geometriai szerkeszthetőség

(Feladatok)

Dormán Miklós
2009/2010. őszi félév

Jelölések

Halmazok, számhalmazok

$P(X)$	$\rightsquigarrow$ az X halmaz részhalmazainak halmaza, azaz az X halmaz **hatványhalmaza**
$\mathbb{N}$	$\rightsquigarrow$ a természetes számok halmaza, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	$\rightsquigarrow$ az egész számok halmaza, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	$\rightsquigarrow$ a racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	$\rightsquigarrow$ a valós számok halmaza
$\mathbb{C}$	$\rightsquigarrow$ a komplex számok halmaza
$\mathbb{A}$	$\rightsquigarrow$ a racionális számtest felett algebrai komplex számok halmaza

Relációk

0_A	$\rightsquigarrow$ $\{(a, a) \mid a \in A\}$ — az egyenlőségreláció az A halmazon
1_A	$\rightsquigarrow$ $A \times A$ — a teljesreláció az A halmazon

Mátrixok

$K^{n \times n}$	$\rightsquigarrow$ a K test feletti $n \times n$-es **mátrix**ok halmaza
$\det(A)$	$\rightsquigarrow$ az A négyzetes mátrix **determináns**a
A^T	$\rightsquigarrow$ az A mátrix **transzponált**ja
$\mathfrak{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$	$\rightsquigarrow$ az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elemekhez tartozó **Vandermonde-mátrix**
$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$	$\rightsquigarrow$ az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elemekhez tartozó **Vandermonde-determináns**

Csoportok, permutációcsoportok

$\langle X \rangle$	$\rightsquigarrow$ a $\mathbb{G}$ csoport $X \subseteq G$ részhalmaz által generált részcsoportja
S_H	$\rightsquigarrow$ a **szimmetrikus csoport** a H halmazon[1]
A_H	$\rightsquigarrow$ az **alternáló csoport** a H halmazon[2]
D_n	$\rightsquigarrow$ az n-edfokú **diédercsoport**
Q_8	$\rightsquigarrow$ a **kvaterniócsoport**
$[G, G]$	$\rightsquigarrow$ a G csoport **kommutátor részcsoport**ja
$\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{B}$	$\rightsquigarrow$ injektív homomorfizmus $\mathbb{A}$-ból $\mathbb{B}$-be.

Polinomok

$K[x]$	$\rightsquigarrow$ a K test feletti x-határozatlanú **polinomgyűrű**
f^*	$\rightsquigarrow$ az $f \in K[x]$ **polinom fokszáma**
$K(x)$	$\rightsquigarrow$ az x határozatlan **racionális kifejezés**einek halmaza a K test felett, azaz $Q_{K[x]}$
$D_x(f)$	$\rightsquigarrow$ az f polinom x határozatlan szerinti **formális derivált**ja

Gyűrűk, testek és vektorterek

$a \sim b$	$\rightsquigarrow$ az a és b elemek **asszociált**ak, azaz $a \mid b$ és $b \mid a$

[1] $S_H = \{\pi\colon H \to H \mid \pi \text{ permutáció}\}$, ha H véges ($|H| = n \in \mathbb{N}$), akkor $|S_H| = n!$. Amennyiben $H = \{1, 2, \dots, n\}$, akkor S_H helyett szokás az S_n jelölést használni.

[2] $A_H = \{\pi\colon H \to H \mid \pi \text{ páros permutáció}\}$, ha H véges ($|H| = n \in \mathbb{N}$), akkor $|A_H| = \frac{n!}{2}$. Amennyiben $H = \{1, 2, \dots, n\}$, akkor A_H helyett szokás az A_n jelölést használni.

Q_D	$\rightsquigarrow$ a D integritástartomány **hányadostest**e
$\mathrm{char}(K)$	$\rightsquigarrow$ a K test **karakterisztká**ja[3]
$\dim_K V$	$\rightsquigarrow$ a K test feletti V vektortér **dimenzió**ja

Testbővítések

$L:K$	$\rightsquigarrow$ az L test a K test **testbővítés**e
$[L:K]$	$\rightsquigarrow$ az $L:K$ **testbővítés foka**
$m_{\alpha,K}$	$\rightsquigarrow$ az α elem **minimálpolinom**ja a K test felett
$\mathrm{gr}_K(\alpha)$	$\rightsquigarrow$ az α **elem foka** a K test felett
$\mathrm{Aut}(K)$	$\rightsquigarrow$ a K test **automorfizmus**ainak halmaza
$\mathrm{Aut}_K(L)$	$\rightsquigarrow$ a L test K fixen hagyó **automorfizmus**ainak halmaza, azaz az $L:K$ testbővítés Galois-csoportja
$\mathrm{Gal}(L:K)$	$\rightsquigarrow$ az $L:K$ **testbővítés Galois-csoportja**
$\mathrm{Gal}_K(f)$	$\rightsquigarrow$ az $f \in K[x]$ **polinom Galois-csoportja**
$\mathfrak{F}$	$\rightsquigarrow$ a **Frobenius-endomorfizmus**
$L^\times$	$\rightsquigarrow$ az L **test multiplikatív csoportja**, azaz $L^\times = (L\setminus\{0\};\cdot)$.

[3] a K test karakterisztikája 0 vagy prímszám.

Régebbi írásbeli feladatok megoldásai

1/1. Határozza meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}$ bővítés fokát.
$\to$ Az $x^2 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis főpolinom, így $m_{\sqrt{5},\mathbb{Q}} = x^2 - 5$. Ezért a $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}$ bővítés foka $m^*_{\sqrt{5},\mathbb{Q}} = 2$.

1/2. Mutassa meg, hogy az $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ valós szám algebrai szám. Határozza meg a minimálpolinomját és fokát $\mathbb{Q}$ felett.
$\to$ Mivel

$$\begin{aligned}
\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} &\Longrightarrow (\alpha - \sqrt{2})^3 = 2 \\
&\Longrightarrow \alpha^3 + 6\alpha - \sqrt{2}(3\alpha^2 + 2) = 2 \\
&\Longrightarrow \alpha^3 + 6\alpha - 2 = \sqrt{2}(3\alpha^2 + 2) \\
&\Longrightarrow (\alpha^3 + 6\alpha - 2)^2 = 2(3\alpha^2 + 2)^2 \\
&\Longrightarrow \alpha^6 - 6\alpha^4 - 4\alpha^3 + 12\alpha^2 - 24\alpha - 4 = 0,
\end{aligned}$$

ezért α gyöke az $f = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4 \in \mathbb{Q}[x]$ főpolinomnak, azaz α algebrai $\mathbb{Q}$ felett. Legyen $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ és $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Mivel $m_{\sqrt{2},\mathbb{Q}} = x^2 - 2$, ezért $[K : \mathbb{Q}] = 2$. Tekintsük az $L : K$ testbővítést. Felhasználva, hogy $L = K(\sqrt[3]{2})$ azt kapjuk, hogy $[L : K] = m^*_{\sqrt[3]{2},K}$. Mivel $\sqrt[3]{2}$ gyöke az $x^3 - 2 \in K[x]$ főpolinomnak, ezért $m_{\sqrt[3]{2},K} \mid x^3 - 2$. Így csak azt kellene ellenőrizni, hogy $x^3 - 2$ irreducibilis-e K felett:

$$x^3 - 2 \text{ irreducibilis } K \text{ felett} \Longleftrightarrow \sqrt[3]{2} \in K.$$

Tegyük fel, hogy $\sqrt[3]{2} \in K$. Ekkor vannak olyan a és b racionális számok, amelyekre $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2}$ teljesül. Ekkor azonban

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2} &\Longleftrightarrow 2 = (a + b\sqrt{2})^3 \\
&\Longleftrightarrow 2 = a^3 + 3a^2b\sqrt{2} + 6ab^2 + 2\sqrt{2}b^3 \\
&\Longleftrightarrow 2 - a^3 - 6a^2b = (3a^2b + 2b^3)\sqrt{2} \\
&\Longleftrightarrow 2 - a^3 - 6a^2b = 0 \quad \text{és} \quad 3a^2b + 2b^3 = 0.
\end{aligned}$$

Ezen utolsó egyenletrendszernek azonban nincs racionális megoldása, így ellentmondásra jutottunk. Azaz $\sqrt[3]{2} \notin K$, aminek következtében $x^3 - 2 \in K[x]$ irreducibilis. Ezért $m_{\sqrt[3]{2},K} = x^3 - 2$ és $[L : K] = 3$. Ekkor a Fokszámtétel szerint $[L : \mathbb{Q}] = 6$. Most már csak azt kellene igazolni, hogy $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Az világos, hogy $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq L$, mivel $\alpha \in L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$. Az már kevésbé világos, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{12}{155}\alpha^5 + \frac{9}{310}\alpha^4 - \frac{16}{31}\alpha^3 - \frac{78}{155}\alpha^2 + \frac{231}{155}\alpha - \frac{182}{155}.$$

Azaz $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$, és így $\sqrt[3]{2} = \alpha - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Továbbá, az is teljesül, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$. Így

$$\mathrm{gr}_K(\alpha) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}] = 6,$$

valamint ennek következtében $m^*_{\alpha,\mathbb{Q}} = \mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\alpha) = 6$. Ezért $m_{\alpha,\mathbb{Q}} = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4$.

1/3. Legyen L az $f = x^4 - x \in \mathbb{Q}[x]$ polinom felbontási teste ($\mathbb{Q}$ felett). Van-e olyan $\alpha \in L$ elem, amelyre $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ teljesül?

$\rightarrow$ Mivel f gyökei $0, 1, \omega$ és ω^2, ahol $\omega = -\dfrac{1}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ezért $L = \mathbb{Q}(0, 1, \omega, \omega^2) = \mathbb{Q}(\omega)$.

1/4. Határozza meg az $f = x^3 - 6x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportját.

$\rightarrow$ Az f polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (Schönemann–Eisenstein-tétel, $p = 2$), így Galois-csoportja tranzitívan hat gyökeinek halmazán, azaz $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ izomorf A_3-mal vagy S_3-mal. Mivel az f polinom diszkriminánsa -108 és nincs olyan q racionális szám, amelyre $q^2 = -108$, ezért $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \cong S_3$.

2/1. Határozza meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ bővítés fokát.

$\rightarrow$ Mivel $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{5})$, ezért

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = m^*_{\sqrt{5},\mathbb{Q}(\sqrt{2})}.$$

Megmutatjuk, hogy $m_{\sqrt{5},\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = x^2 - 5$. Nyilván elegendő megmutatni, hogy $x^2 - 5 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ irreducibilis. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Tegyük fel, hogy $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Ekkor vannak olyan a és b racionális számok, amelyekre $\sqrt{5} = a + b\sqrt{2}$ teljesül. Mivel

$$\sqrt{5} = a + b\sqrt{2} \Longleftrightarrow 5 - a^2 - 2b^2 = 2b\sqrt{10},$$

ellentmondást kapunk. Azaz $m_{\sqrt{5},\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = x^2 - 5$.

2/2. Mutassa meg, hogy az $\alpha = 1 - \sqrt[3]{4}$ valós szám algebrai szám. Határozza meg a minimálpolinomját és fokát $\mathbb{Q}$ felett.

$\rightarrow$ Mivel

$$\alpha = 1 - \sqrt[3]{4} \Longleftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 3 = 0,$$

ezért α gyöke az $f = x^3 - 3x^2 + 3x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ főpolinomnak, amely irreducibilis is a Schönemann–Eisenstein-tétel szerint. Így $m_{\alpha,\mathbb{Q}} = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$, azaz α algebrai szám, melynek foka 3.

2/3. Legyen L az $f = x^4 - x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom felbontási teste ($\mathbb{Q}$ felett). Van-e olyan $\alpha \in L$ elem, amelyre $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ teljesül?

$\rightarrow$ Mivel az f polinom gyökei $\pm\sqrt{2}, \pm i$, ezért $L = \mathbb{Q}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -i, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. Legyen $\alpha = \sqrt{2} + i$. Ekkor $\alpha \in L$ miatt $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq L$. Felhasználva, hogy $\mathbb{Q}(\alpha) \ni \dfrac{3}{\alpha} = \sqrt{2} - i$ a következőt kapjuk:

$$\sqrt{2}, i \in \mathbb{Q}(\alpha).$$

Azaz $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

2/4. Határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportját.
$\rightarrow$ Az f polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (Schönemann–Eisenstein-tétel, $p = 3$), így Galois-csoportja tranzitívan hat gyökeinek halmazán, azaz $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ izomorf A_3-mal vagy S_3-mal. Mivel az f polinom diszkriminánsa -1431 és nincs olyan q racionális szám, amelyre $q^2 = -1431$, ezért $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \cong S_3$.

3/1. Határozza meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ bővítés fokát.
$\rightarrow$ Mivel $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$, ezért $\mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}-\sqrt{2})$, és így $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5}-\sqrt{2})] = 1$.

3/2. Mutassa meg, hogy az $\alpha = 3 - \sqrt[4]{3}$ valós szám algebrai szám. Határozza meg α fokát $\mathbb{Q}$ felett.
$\rightarrow$ Mivel

$$\alpha = 3 - \sqrt[4]{3} \Longleftrightarrow \alpha^4 - 12\alpha^3 + 54\alpha^2 - 108\alpha + 78 = 0,$$

ezért α gyöke az $f = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 78 \in \mathbb{Q}[x]$ főpolinomnak, amely irreducibilis is a Schönemann–Eisenstein-tétel szerint. Így $m_{\alpha,\mathbb{Q}} = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 78$, azaz α algebrai szám, melynek foka 4.

3/3. Legyen L az $f = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom felbontási teste ($\mathbb{Q}$ felett). Van-e olyan $\alpha \in L$ elem, amelyre $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ teljesül?
$\rightarrow$ Mivel az f polinom gyökei $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$, ezért $L = \mathbb{Q}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Legyen $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Ekkor $\alpha \in L$ miatt $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq L$. Felhasználva, hogy $\mathbb{Q}(\alpha) \ni \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ a következőt kapjuk:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\alpha).$$

Azaz $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

3/4. Határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportját.
$\rightarrow$ Az f polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, mivel nincs racionális gyöke, így Galois-csoportja tranzitívan hat gyökeinek halmazán, azaz $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ izomorf A_3-mal vagy S_3-mal. Mivel az f polinom diszkriminánsa $81 = 9^2$, ezért $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \cong A_3$.

4/1. Mutassa meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{21}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ és határozza meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}) : \mathbb{Q}(\sqrt{21})$ bővítés fokát.
$\rightarrow$ Először megmutatjuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$. Mivel $\sqrt{3}+\sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$, ezért $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$. Felhasználva a

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}) \ni \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$$

összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{3}+\sqrt{7}) - \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}\right) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}),$$

valamint $\sqrt{7} = (\sqrt{3}+\sqrt{7}) - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$. Így $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$. Most már nyilvánvaló, hogy $\sqrt{21} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$.

A $\mathbb{Q}(\sqrt{21}) : \mathbb{Q}$ testbővítés foka 2, mivel $m_{\sqrt{21},\mathbb{Q}} = x^2 - 21$. A $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}) : \mathbb{Q}$ testbővítés foka 4, mivel

- $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{7})$,
- $[\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{7}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{7}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ és
- $m_{\sqrt{3},\mathbb{Q}} = x^2 - 3$, $m_{\sqrt{7},\mathbb{Q}(\sqrt{3})} = x^2 - 7$.

Így a Fokszámtétel szerint

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}) : \mathbb{Q}(\sqrt{21})] = \frac{[\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{7}) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\sqrt{21}) : \mathbb{Q}]} = 2.$$

4/2. Mutassa meg, hogy az $\alpha = 1 - \sqrt[4]{7}$ valós szám algebrai szám. Határozza meg α fokát $\mathbb{Q}$ felett.
$\rightarrow$ Mivel

$$\alpha = 1 - \sqrt[4]{7} \iff \alpha^4 - 4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0,$$

ezért α gyöke az $f = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 6 \in \mathbb{Q}[x]$ főpolinomnak, amely irreducibilis is a Schönemann–Eisenstein-tétel szerint. Így $m_{\alpha,\mathbb{Q}} = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 6$, azaz α algebrai szám, melynek foka 4.

4/3. Legyen L az $f = x^4 - 10x^2 + 21 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom felbontási teste ($\mathbb{Q}$ felett). Van-e olyan $\alpha \in L$ elem, amelyre $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ teljesül?
$\rightarrow$ Mivel az f polinom gyökei $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{7}$, ezért $L = \mathbb{Q}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{7}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Legyen $\alpha = \sqrt{3}+\sqrt{7}$. Ekkor $\alpha \in L$ miatt $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq L$. Felhasználva, hogy $\mathbb{Q}(\alpha) \ni \dfrac{4}{\alpha} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$ a következőt kapjuk:

$$\sqrt{3}, \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\alpha).$$

Azaz $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

4/4. Határozza meg az $f = 8x^3 - 12x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom $\mathbb{Q}$ feletti Galois-csoportját.
$\rightarrow$ Az f polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, mivel nincs racionális gyöke, így Galois-csoportja tranzitívan hat gyökeinek halmazán, azaz $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ izomorf A_3-mal vagy S_3-mal. Mivel az f polinom diszkriminánsa $5184 = 72^2$, ezért $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \cong A_3$.

Az $f = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinom diszkriminánsa:

$$-27a_0^2a_3^2 + 18a_0a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3.$$

Irodalomjegyzék

[1] **Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes**, *Absztrakt algebrai feladatok*, POLYGON (Szeged, 2005).

[2] **Csákány Béla**, *Algebra*, Nemzeti Tankönyvkiadó (1995).

[3] **Czédli Gábor, Szendrei Ágnes**, *Geometriai szerkeszthetőség*, POLYGON (Szeged, 1997).

[4] **Kiss Emil**, *Bevezetés az algebrába*, TYPOTEX (Budapest, 2007).