Beadható feladatok

Komputer algebra (MBL313L)

2009/2010. őszi félév

Legyenek u_0, u_1, a és b tetszőleges valós számok. Az $\mathcal{F}_n^{[u_0,u_1;\ a,b]}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ sorozatot definiáljuk az alábbi módon:

$$\mathcal{F}_0^{[u_0,u_1;\ a,b]} = u_0,\ \mathcal{F}_1^{[u_0,u_1;\ a,b]} = u_1 \quad \text{és} \quad \mathcal{F}_n^{[u_0,u_1;\ a,b]} = a \cdot \mathcal{F}_{n-1}^{[u_0,u_1;\ a,b]} + b \cdot \mathcal{F}_{n-2}^{[u_0,u_1;\ a,b]}\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2).$$

Mindezek után definiáljuk a Fibonacci-, Lucas- és Pell-sorozatokat az alábbi módon:

$$\text{Fibonacci-sorozat: } F_n = \mathcal{F}_n^{[0,1;\ 1,1]}\ (n \in \mathbb{N}_0),$$
$$\text{Lucas-sorozat: } L_n = \mathcal{F}_n^{[2,1;\ 1,1]}\ (n \in \mathbb{N}_0),$$
$$\text{Pell-sorozat: } P_n = \mathcal{F}_n^{[0,1;\ 2,1]}\ (n \in \mathbb{N}_0).$$

Az F_n, L_n, illetve P_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ számokat rendre Fibonacci-, Lucas-, illetve Pell-számoknak nevezzük. Legyen $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re $\dfrac{(F_n + L_n)\alpha + (F_{n-1} + L_{n-1})}{2}$ az α valós szám egész kitevős hatványa.

2. Feladat. Legyen a tetszőleges páratlan természetes szám. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\in \mathbb{N}_0$-ra $P_{n+a}^2 + P_n^2$ Pell-számok szorzatára bontható. Mit mondhatunk abban az esetben, ha $a \in \mathbb{N}$ páros?

3. Feladat. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re legyen $H_n = \{(h,k) \mid h,k \in \mathbb{N},\ h \leqslant k \text{ és } h+k = 2n\}$, valamint legyen

$$S_n = \sum_{(h,k) \in H_n} F_h \cdot F_k.$$

Írjuk fel S_n-t zárt alakban.

4. Feladat. A Fibonacci-polinomokat az alábbi rekurzióval definiáljuk:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1, \quad \text{és} \quad f_n = x \cdot f_{n-1} + f_{n-2}\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2).$$

Határozzuk meg az

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1) \cdot f_{2n+1}(2x)}$$

integrál értékét $(n \in \mathbb{N}_0)$.

5. Feladat. Határozzuk meg az a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ sorozat általános tagját, ahol a sorozatot az

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \quad \text{és} \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{1 + a_{n-1}a_{n-2}}\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$$

rekurzió definiálja.

6. Feladat. Mutassuk meg, hogy $P_{23} = 2^{11} \prod_{j=1}^{11} \left(3 + \cos \dfrac{2j\pi}{23}\right)$.

7. Feladat. Mutassuk meg, hogy teljesül az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1} \cdot F_{2n} \cdot F_{2n+1}}$$

egyenlőség.

8. Feladat. Határozzuk meg az a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ sorozat általános tagját, ahol a sorozatot az

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad a_n = 4 \cdot a_{n-1}^3 + 3 \cdot a_{n-1} \ (n \in \mathbb{N})$$

rekurzió definiálja.

9. Feladat. Legyen

$$S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n \cdot L_{2n-1} - 1} \quad \text{és} \quad S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n \cdot L_{2n-1} + 1}.$$

Határozzuk meg $\dfrac{S_1}{S_2}$ értékét.

10. Feladat. Legyen $n \geqslant 0$ tetszőleges egész szám. Jelölje ξ_n az $x^2 - L_n \cdot x + (-1)^n \in \mathbb{R}[x]$ polinom nagyobbik gyökét. Fejezzük ki ξ_n-t α segítségével.

11. Feladat. Legyen n tetszőleges természetes szám. Határozzuk meg az

$$\begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_n \\ F_1 & F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{n-1} \\ F_2 & F_1 & F_0 & F_1 & \cdots & F_{n-2} \\ F_3 & F_2 & F_1 & F_0 & \cdots & F_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n & F_{n-1} & F_{n-2} & F_{n-3} & \cdots & F_0 \end{vmatrix}$$

determináns értékét.

12. Feladat. Legyenek p, q páratlan egészek és $u_0, u_1 \in \mathbb{Z}$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{F}_{n+6}^{[u_0,u_1;\ p,-q]} \equiv \mathcal{F}_{n}^{[u_0,u_1;\ p,-q]} \pmod 4$$

teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re.

13. Feladat. Az $\mathcal{R}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot definiáljuk az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= 1, \\ \mathcal{R}_2 &= 1, \\ \mathcal{R}_3 &= 25, \\ \mathcal{R}_4 &= 121, \\ \mathcal{R}_5 &= 1296, \\ \mathcal{R}_6 &= 9025, \\ \mathcal{R}_7 &= 78961, \\ \mathcal{R}_8 &= 609961, \\ \mathcal{R}_9 &= 5040025, \\ \mathcal{R}_{10} &= 40144896, \\ \mathcal{R}_{11} &= 326199721, \\ \mathcal{R}_{12} &= 2621952025, \\ \mathcal{R}_{13} &= 21199651201, \\ \mathcal{R}_{14} &= 170859049201, \\ \mathcal{R}_{15} &= 1379450250000, \end{aligned}$$

és $n \geqslant 16$ esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n = 8 \cdot \mathcal{R}_{n-1} + 22 \cdot \mathcal{R}_{n-2} - 190 \cdot \mathcal{R}_{n-3} + 28 \cdot \mathcal{R}_{n-4} + 987 \cdot \mathcal{R}_{n-5} - 700 \cdot \mathcal{R}_{n-6} - 1652 \cdot \mathcal{R}_{n-7} +\\ 1652 \cdot \mathcal{R}_{n-8} + 700 \cdot \mathcal{R}_{n-9} - 987 \cdot \mathcal{R}_{n-10} - 28 \cdot \mathcal{R}_{n-11} +\\ 190 \cdot \mathcal{R}_{n-12} - 22 \cdot \mathcal{R}_{n-13} - 8 \cdot \mathcal{R}_{n-14} + \mathcal{R}_{n-15}.\end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy $\mathcal{R}_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesnégyzet.

14. Feladat. Az u_n, v_n és w_n $(n \in \mathbb{N})$ sorozatokat definiáljuk az alábbi módon:

$$\begin{array}{ll} u_1 = 1/2, & u_n = u_{n-1}^2 + v_{n-1}^2 - w_{n-1}^2 \\ v_1 = \sqrt{2}, & v_n = 2u_{n-1}v_{n-1} \\ w_1 = \sqrt{3}/2, & w_n = 2u_{n-1}w_{n-1} \end{array} \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2).$$

Fejezzük ki u_n-t, v_n-t és w_n-t a Fibonacci és/vagy Lucas-számok segítségével.

15. Feladat. Határozzuk meg az a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ sorozat általános tagját, ahol a sorozatot az

$$a_0 = 1 \quad \text{és} \quad a_n = 5 \cdot a_{n-1}^3 - 3 \cdot a_{n-1}\ (n \in \mathbb{N})$$

rekurzió definiálja.

16. Feladat. Határozzuk meg az $s_t = \sum_{n=1}^{t} \dfrac{(2n+1)F_n}{n(n+1)2^n}$ $(t \in \mathbb{N})$ sorozat határértékét.

17. Feladat. Legyen $Q_n = \mathcal{F}_n^{[1,1;\ 2,1]}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Írjuk fel a

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{n} Q_k$$

összegeket zárt alakban.

18. Feladat. Határozzuk meg az $s_t = \sum_{n=1}^{t} \dfrac{n2^nF_n}{5^n}$ $(t \in \mathbb{N})$ sorozat határértékét.

19. Feladat. Mutassuk meg, hogy $F_{n+1}^2 \geqslant F_{2n}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$-ra.

20. Feladat. Legyen n tetszőleges természetes szám. Határozzuk meg az

$$\begin{vmatrix} L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & \cdots & L_n \\ L_1 & L_0 & L_1 & L_2 & \cdots & L_{n-1} \\ L_2 & L_1 & L_0 & L_1 & \cdots & L_{n-2} \\ L_3 & L_2 & L_1 & L_0 & \cdots & L_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n & L_{n-1} & L_{n-2} & L_{n-3} & \cdots & L_0 \end{vmatrix}$$

determináns értékét.

21. Feladat. Legyen n tetszőleges természetes szám. Határozzuk meg az

$$\begin{vmatrix} L_0^2 & L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 & \cdots & L_n^2 \\ L_1^2 & L_0^2 & L_1^2 & L_2^2 & \cdots & L_{n-1}^2 \\ L_2^2 & L_1^2 & L_0^2 & L_1^2 & \cdots & L_{n-2}^2 \\ L_3^2 & L_2^2 & L_1^2 & L_0^2 & \cdots & L_{n-3}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n^2 & L_{n-1}^2 & L_{n-2}^2 & L_{n-3}^2 & \cdots & L_0^2 \end{vmatrix}$$

determináns értékét.

22. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & e^{-i\pi/3} \end{pmatrix}$, ahol $e^{a+bi} = a(\cos b + i \sin b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Fejezzük ki az A mátrix n-edik hatványát ($n \in \mathbb{N}$) a Fibonacci-számok és/vagy Lucas-számok segítségével.

23. Feladat. Legyen n természetes szám, valamint legyen $S_k = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+5} + \binom{n}{k+10} \cdots$. Mutassuk meg, hogy ha $0 \leqslant i < j < 5$, akkor $|S_i - S_j|$ Fibonacci-szám.

24. Feladat. Legyen $g = \alpha + 2$, valamint legyen n természetes szám. Írjuk fel a g^n valós számot $p_n\alpha + q_n$ alakban, ahol $n, p_n, q_n \in \mathbb{N}$.

25. Feladat. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre a $\sum_{k=1}^{n} kF_k$ összeg páros?

26. Feladat. Az a, b, c, d pozitív egészekre teljesül, hogy

- $1 < a < b < c < d$,
- tetszőleges n természetes számra, ha $n \geqslant d$, akkor

$$F_n = F_{n-a} + 6F_{n-b} + F_{n-c} + F_{n-d}.$$

Keressünk a fenti feltételeket kielégítő pozitív egészeket.

27. Feladat. Határozzuk meg a

$$\sum_{k=0}^{n} F_{k-[\sqrt{k}]^2}$$

kifejezés zárt alakját ($n \in \mathbb{N}$).

28. Feladat. A Lucas-polinomokat az alábbi rekurzióval definiáljuk:

$$l_0 = 2,\ l_1 = x, \quad \text{és} \quad l_n = x \cdot l_{n-1} + l_{n-2}\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2).$$

Keressünk olyan nemtriviális differenciálegyenletet, amelynek megoldása az l_n polinom k-adik deriváltja ($k, n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n$).

Egy-egy hallgatótól legalább 10 feladat megoldását kérem, de bármely két hallgató által megoldott feladatok között legfeljebb öt megegyező lehet. Leadási határidő: 2009. január 10.