

KOMPUTER ALGEBRA (Mm5121)

2. zárthelyi dolgozat

2008. november 24.

1. Legyenek  $f$  és  $g$  az alábbi leképezések:

$$f: \{x \in \mathbb{R} : |x| < 4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^{-x^2} + x}{x^3 - x - 1},$$

$$g: \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^{-x} - x}{-x^4 + 4x - 1}.$$

Ábrázoljuk az  $f$  és  $g$  leképezések grafikonjait úgy, hogy a grafikonok színe és vastagsága eltérő legyen.

2. A  $G_1$ ,  $G_2$  és  $G_3$  gömbökre, melyek sugara rendre 1, 2 és 3, teljesülnek az alábbiak:

$$G_1 \subset G_2, \quad G_1 \cap G_3 = \emptyset, \quad G_2 \cap G_3 \neq \emptyset.$$

Rajzoljunk ilyen gömböket.

3. Határozzuk meg az alábbi egyenletek valamennyi valós megoldását:

$$4^x = 1 + 2x,$$

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = x^2 - 5x + 7,$$

$$x^{x^x} = \frac{1}{10}.$$

4. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valamennyi valós megoldását:

$$\frac{xyz}{x+y} = 2, \quad \frac{xyz}{y+z} = \frac{6}{5}, \quad \frac{xyz}{z+x} = \frac{3}{2}.$$

5. Legyen  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ . Határozzuk meg mindazokat az  $x$  komplex számokat, amelyekre az  $X^2 + X^T$  mátrix determinánsának az értéke 26.

6. Legyen  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Határozzuk meg azokat az  $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mátrixokat, amelyekre  $XA^T - A^2X = X^2$ .

7. Legyen  $f$  az alábbi leképezés:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^{\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)} - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}.$$

(a) Határozzuk meg  $f$  szakadási helyeinek környezetében a leképezés határértékét. (b) Határozzuk meg  $f$ ,  $f'$  és  $f''$  zérushelyeit. (c) Ábrázoljuk az  $f$ ,  $f'$  és  $f''$  leképezéseket egy koordinátarendszerben. (d) Írjuk fel az  $x_0 = \pi$  pontban  $f$  érintőjének egyenletét, és ábrázoljuk  $f$ -et és az érintőt egy koordinátarendszerben. (e) Határozzuk meg azoknak az egységsugarú köröknek az egyenletét, amelyek a  $(0, (\sqrt{e} - 1)/2)$  pontban érintik az  $f$  leképezés grafikonját. Ábrázoljuk is őket.